Institut für Thermodynamik
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

27. Juli 2012

Klausur zur Vorlesung

Wärme- und Stoffübertragung

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- und Gedankengang muss erkennbar sein!
Interpolationsvorschriften und Stützstellen sind anzugeben.
Hilfsmittel sind zugelassen, Verwenden Sie, sofern benötigt, die Gröberdiagramme aus dem Skript. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

Aufgabe 1: *Raumstation* 16 von 50 Punkten

Kurzfrage (2 Punkte): Erklären Sie knapp, warum der Temperaturgradient in einem zylinderförmigen Körper, z.B. einem Rohr, im Gegensatz zu einer ebenen Platte nicht linear verläuft. (Innen- und Außenseite sollen unterschiedliche Temperaturen haben). Wie müssen Innen und Außenradius gewählt werden, damit sich auch in einem Rohr ein beinahe linearer Temperaturverlauf einstellt.

Im inneren einer kleinen kugelförmigen Raumstation mit einem Außendurchmesser von $d_a = 10\,m$ herrscht eine konstante Lufttemperatur von $T_L = 20°C$. Der Wärmeübergangskoeffizient auf der Innenseite der Raumstation beträgt $\alpha_i = 1{,}5\,\frac{W}{m^2\,K}$. Die Außenhülle der Raumstation besteht (von innen kommend) zunächst aus einer $40\,cm$ dicken Isolierschicht ($\lambda = 0{,}023\,\frac{W}{m\,K}$) und einer $0{,}8\,cm$ dicken Aluminiumhülle. Die Oberfläche der Aluminiumhülle hat einen Emissionskoeffizienten von $\epsilon = 0{,}05$.

Gehen Sie davon aus, dass die unendlichen Weiten des Weltraums eine Temperatur von $T_{All} = 3\,K$ haben. Solarstrahlung soll nicht berücksichtigt werden

a) Berechnen Sie den Wärmeleitwiderstand der Außenhülle (Isolierung + Aluminiumhülle). Es ist an dieser Stelle hinreichend, wenn das Ergebnis auf ein Promille genau ist.

b) Zeigen Sie, dass die Außenseite der Raumstation eine Temperatur von -71,9°C hat.

c) Welche Temperatur hat die Innenseite der Isolierschicht, also die Kontaktfläche zur Luft in der Station?

d) Zeichnen Sie ein Temperaturprofil $T(r)$ vom Zentrum der Kugel bis zur Außenseite der Station.

Lösung:

KF: Die Querschnittsfläche einer ebenen Platte ist konstant, während sie bei einem Rohr von innen nach aussen immer größer wird. Dies spielt allerdings keine Rolle, wenn die Differenz zwischen Inn- und Aussendurchmesser klein ist im Verhältnis zum Durchmesser des Rohres.

a) der Wärmeleitwiderstand der Aluminiumhülle kann aufgrund der deutlich größeren Wärmeleitfähigkeit ($\lambda_{Alu} = 237\,\frac{W}{m\,K}$ - siehe Anhang B11) gegenüber dem Widerstand der Isolationsschicht vernachlässigt werden. Der thermische Leitwiderstand beträgt also:

$$r_i = r_a - \delta_{Alu} - \delta_{Iso} = 5\,m - 0,008\,m - 0,4\,m = 4,592\,m$$

$$R_\lambda = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i+\delta_{Iso}}}{4\cdot\pi\cdot\lambda_{Iso}} = \frac{\frac{1}{4{,}592\,m} - \frac{1}{4{,}592\,m+0{,}4\,m}}{4\cdot\pi\cdot 0{,}023\,\frac{W}{m\,K}} = 0,0604\,\frac{K}{W}$$

b) An der Oberfläche muss der erste Hauptsatz im stationären Fall den Wert 0 annehmen. D.h. der Wärmestrom, der durch Leitung vom Inneren an die Oberfläche transportiert wird $\dot{Q}_\lambda$, muss genau so groß sein, wie der durch Strahlung ans All abgegebene Wärmestrom $\dot{Q}_{All}$.

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_{All} &= \epsilon\cdot\sigma\cdot\underbrace{4\cdot\pi\cdot r_a^2}_{A_a}\cdot(T_a^4 - T_{All}^4)\\
&= 0,05\cdot 6,67\cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2\,K^4}\cdot 4\cdot\pi\cdot(5\,m)^2\cdot\big((273,15-71,9\,K)^4 - (3\,K)^4\big)\\
&= 1461\,W\\
\dot{Q}_\lambda &= \frac{T_L - T_a}{\frac{1}{\alpha_i\cdot 4\cdot\pi\cdot r_i^2} + R_\lambda}\\
&= \frac{(273,15+20)\,K - (273,15-71,9)\,K}{\frac{1}{1{,}5\,\frac{W}{m^2\,K}\cdot 4\cdot\pi\cdot(4{,}592\,m)^2} + 0,0604\,\frac{K}{W}}\\
&= 1461\,W
\end{aligned}$$

c) Der gesamte Wärmestrom durch die Wand entspricht dem Wärmestrom durch Leitung durch die Wand, allerdings bei veränderter Temperaturdifferenz.

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_\lambda &= \frac{T_i - T_a}{R_\lambda}\\
\Rightarrow T_i &= T_a + \dot{Q}_\lambda\cdot R_\lambda\\
&= -71,9^\circ C + 1461\,W\cdot 0,0604\,\frac{K}{W}\\
&= 16,3^\circ C
\end{aligned}$$

d) Konstante Innentemperatur (20°C), Abfall in der Grenzschicht (auf 16,3 °C), durchhängender Verlauf in der kugelförmigen Isolierschicht, sehr flacher Verlauf in der Aluschicht.

Aufgabe 2: *Wärmeleitung* 8 von 50 Punkten

Kurzfrage: Warum ist die Poissonsche Differentialgleichung $\nabla^2 T = \frac{-\dot{q}'''_{diss}}{\lambda}$ nicht geeignet, um die Temperaturverteilung in einer Stahlplatte während eines Abschreckvorgangs in einem Wasserbad zu beschreiben?

Ein $0{,}5\,m$ langer Kupferdraht mit einem kreisrunden Querschnitt ($r = 0{,}4\,mm$) wird von Strom durchflossen. Aufgrund des elektrischen Leitwiderstandes, wird im Draht Wärme dissipert: $\dot{q}'''_{diss} = 0{,}25\,\frac{W}{cm^3}$

Die Mantelfläche des Leiters ist thermisch perfekt isoliert, so dass er nur über seine beiden Enden Wärme abgeben kann. Den Drahtenden wird eine Temperatur von 10°C aufgeprägt.

An welcher Stelle des Drahtes stellt sich die höchste Temperatur ein und wie groß ist diese nach langer Zeit?

Lösung:
KF: Die Poissonsche Differentialgleichung ist nur für stationäre Temperaturfelder geeignet. Bei dem Abkühlvorgang einer Stahlplatte handelt es sich jedoch um ein instationäres Temperaturfeld.

Anwendung der Poissongleichung auf den eindimensionalen Fall (nur x-Koordinate)

$$\nabla^2 T = \frac{-\dot{q}'''_{diss}}{\lambda}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x) = \frac{-\dot{q}'''_{diss}}{\lambda}$$

Zweimalige Integration liefert:

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x) = \frac{-\dot{q}'''_{diss}}{\lambda} \cdot x + C_1$$
$$T(x) = \frac{1}{2} \frac{-\dot{q}'''_{diss}}{\lambda} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Randbedingungen

$$T(0) = 10°C \Rightarrow C_2 = 10°C$$
$$T(0,5) = 10°C \Rightarrow 10°C = \frac{1}{2} \cdot \frac{-250000\,\frac{W}{m^3}}{399\,\frac{W}{m\,K}} \cdot (0,5\,m)^2 + C_1 \cdot 0,5\,m + 10°C$$
$$\Rightarrow C_1 = 156,64\,\frac{°C}{m}$$

Zur Bestimmung der maximalen Temperatur die Ableitung gleich Null setzen:

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x) = \frac{-\dot{q}'''_{diss}}{\lambda} \cdot x + 156,64\,\frac{°C}{m} = 0$$
$$\Rightarrow x = 156,64\,\frac{°C}{m} \cdot \frac{399\,\frac{W}{m\,K}}{250000\,\frac{W}{m^3}} = 0,25\,m$$

Dieses Ergebnis wäre auch aus Symmetriegründen ableitbar gewesen. Zur Bestimmung der Temperatur den Wert für $T(0,25\,m)$ bestimmen:

$$T(0,25) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-250000\,\frac{W}{m^3}}{399\,\frac{W}{m\,K}} \cdot (0,25\,m)^2 + 156,64\,\frac{°C}{m} \cdot 0,25\,m + 10°C = 29,7°C$$

Aufgabe 3: *Wärmeübertrager* 9 von 50 Punkten

Kurzfrage: Nennen Sie einen Wärmeübertragertyp, der gut für die Übertragung von Wärme von flüssigem Wasser an Luft geeignet ist, und erklären Sie knapp warum.

In einem Gleichstromwärmeübertrager wird von einem Strom Wasser ($\dot{V} = 906\,\frac{l}{h}$) Wärme auf einen Luftstrom ($\dot{m} = 25\,\frac{kg}{min}$) übertragen. Die Eintrittstemperaturen betragen $T'_{Wasser} = 80°C$ und $T'_{Luft} = 10°C$.

Der Hersteller des Wärmeübertragers gibt dessen Übertragungsfähigkeit mit 840 W/K an.

Hinweis: Arbeiten Sie mit Stoffwerten bei $40°C$ (Luft) bzw. $60°C$(Wasser).

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der im Skript abgedruckten Betriebscharakteristik die Austrittstemperaturen von Luft und Wasser.

b) Welche Austrittstemperaturen würden sich bei Verwendung eines Gegenstromwärmeübertragers einstellen? Bestimmen Sie die Temperaturen diesmal analytisch.

Lösung:

KF: Am besten eignet sich ein Lamellenrohrbündel-Wärmeübertrager. Dieser besitzt eine kleine Übertragungsfläche Wasser/Metall (großes α) und eine große Übertragungsfläche auf der Luftseite (kleines α).

a) Berechnung der Wärmekapazitätsströme:

$$\dot{m}_W = \dot{V}_W \cdot \rho_W = 906 \, \frac{l}{h} \cdot 3600 \, \frac{s}{h} \cdot 1 \, \frac{kg}{l} = 0,252 \, \frac{kg}{s}$$
$$W_W = \dot{m}_{Wasser} \cdot c_{p,W} = 0,252 \, \frac{kg}{s} \cdot 4184 \, \frac{J}{kg\,K} = 1053 \, \frac{W}{K} = W_2$$
$$\dot{m}_L = 25 \, \frac{kg}{min} \cdot \frac{1}{60} \, \frac{min}{s} = 0,417 \, \frac{kg}{s}$$
$$W_L = \dot{m}_{Luft} \cdot c_{p,L} = 0,417 \, \frac{kg}{s} \cdot 1007 \frac{J}{kg\,K} = 419 \, \frac{W}{K} = W_1$$

Der kleinere Wärmekapazitätsstrom wird zu W_1 gesetzt, damit sich für C_1 ein positiver Wert ergibt. Folglich 1=Luft und 2=Wasser.
Berechnung der Kenndaten für die Betriebscharakteristik:

$$C_1 = \frac{W_1}{W_2} = \frac{419 \, \frac{W}{K}}{1053 \, \frac{W}{K}} = 0,398$$
$$N_1 = \frac{kA}{W_1} = \frac{840 \frac{W}{K}}{419 \, \frac{W}{K}} = 2,00$$

Ablesen aus dem Diagramm im Skript (Abb. 2.16) ergibt einen Wer für $\epsilon_1 = 0,65$
Bestimmung der Austrittstemperaturen mit der dimensionslosen Temperaturänderung:

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{T_1' - T_1''}{T_1' - T_2'} \\
\Rightarrow T_L'' &= T_1'' = T_1' - \epsilon_1 \cdot (T_1' - T_2') \\
&= 10°C - 0,65 \cdot (10°C - 80°C) \\
&= 55,5°C \\
\dot{Q} &= W_2 \cdot (T_2' - T_2'') = W_1 \cdot (T_1'' - T_1') \\
\Rightarrow T_W'' &= T_2'' = T_2' - \frac{W_1}{W_2} \cdot (T_1'' - T_1') \\
&= 80°C - 0,398 \cdot (55,5°C - 10°C) \\
&= 61,87°C
\end{aligned}$$

b) Für den Gegenstrom kann die dimensionslose Temperaturänderung nach folgender Gleichung berechnet werden. Die Werte für $N_1 = 2$ und $C_1 = 0,398$ bleiben gleich.

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{1 - e^{N_1 \cdot (C_1 - 1)}}{1 - C_1 \cdot e^{N_1 \cdot (C_1 - 1)}} \\
&= \frac{1 - e^{2 \cdot (0,398 - 1)}}{1 - 0,398 \cdot e^{2 \cdot (0,398 - 1)}} \\
&= 0,795
\end{aligned}$$

Bestimmung der Austrittstemperaturen:

$$\begin{aligned} T''_L &= T''_1 = T'_1 - \epsilon_1 \cdot (T'_1 - T'_2) \\ &= 10°C - 0,795 \cdot (10°C - 80°C) \\ &= 65,66°C \\ T''_W &= T''_2 = T'_2 - \frac{W_1}{W_2} \cdot (T''_1 - T'_1) \\ &= 80°C - 0,398 \cdot (65,66°C - 10°C) \\ &= 57,82°C \end{aligned}$$

Aufgabe 4: *Schon wieder eine Eisenplatte* 17 von 50 Punkten

Kurzfrage: Warum kühlt ein Frühstücksei auf einer von Menschen bewohnten Mondstation (Luftdruck: 1 bar) langsamer ab als in der NASA-Zentrale in den USA?

Eine vertikal ausgerichtete Eisenplatte hat eine Höhe von $H = 5\,m$ und eine Breite von $B = 2\,m$ und eine Dicke von $d = 5\,cm$.

Diese Platte hat zu Beginn der Betrachtung eine räumlich konstante Temperatur von $80°C$. Diese Platte wird in ein Wasserbecken mit einer konstanten Wassertemperatur von $T_W = 20°C$ gebracht.

Hinweis: Berücksichtigen Sie bei allen folgenden Fragen immer nur den Wärmetransport senkrecht zu den beiden großen der insgesamt sechs Flächen, aus denen die Platte besteht.

a) Bestimmen Sie den direkt nach dem Eintauchen von der Platte an das Wasser konvektiv abgegeben Wärmestrom.

b) Schätzen Sie den direkt nach dem Eintauchen von der Platte an das Wasser konvektiv abgegeben Wärmestrom ab, wenn die Platte eine Temperatur von $86°C$ hätte.

Gehen Sie für den folgenden Aufgabenteil von einem mittleren konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten von $\alpha_{Platte} = 500\,\frac{W}{m^2\,K}$ für die betrachtete Platte im Wasserbad aus.

c) Bestimmen Sie die Temperatur $20\,mm$ unter der Oberfläche der Platte nach 5 Minuten

d) Kommentieren Sie die folgende Aussage: „Während des Abkühlvorgangs der Platte wird Wärme von innen nach außen transportiert. Dabei ist die Wärmestromdichte in jeder dünnen Schicht der Platte gleich groß.“

e) Bestimmen Sie den mittleren konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten der oberen Hälfte der Platte, also der oberen $2{,}5\,m$, für den Fall, dass eine Pumpe unter der Platte angebracht wird, so dass die Platte von unten nach oben mit $w_0 = 5\,\frac{m}{s}$ angeströmt wird.

Lösung:
KF: Auf dem Mond ist die Gravitation deutlich kleiner. Damit wird die freie Konvektion, die durch Dichteunterschiede hervorgerufen wird reduziert. Dies wirkt sich in der Berechnung durch einen kleineren Wert für g in der Grashof-Zahl aus.

a) Stoffwerte des Wassers bei 50°C

$$\begin{aligned}\lambda &= 643,6 \cdot 10^{-3}\,\frac{W}{m\,K}\\ \nu &= 0,554 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}\\ Pr &= 3,553\\ \beta &= 0,2067 \cdot 10^{-3} K^{-1} \quad \text{bei } 20°\text{C}\end{aligned}$$

Charakteristische Länge für eine vertikale ebene Platte ist die Höhe $l = H$.

$$\begin{aligned}Gr &= \frac{g \cdot l^3}{\nu^2} \cdot \beta \cdot (\vartheta_W - \vartheta_\infty)\\ &= \frac{9,81\,\frac{m}{s^2} \cdot (5\,m)^3}{(0,554 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s})^2} \cdot 0,2067 \cdot 10^{-3} K^{-1} \cdot (80-20)K\\ &= 4,96 \cdot 10^{13}\\ Ra &= Gr \cdot Pr = 4,96 \cdot 10^{13} \cdot 3,553 = 1,76 \cdot 10^{14}\\ f_1 &= \left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{-\frac{16}{9}} = 0,603\\ Nu &= \left(0,825 + 0,387\sqrt[6]{Ra \cdot f_1}\right)^2\\ &= \left(0,825 + 0,387\sqrt[6]{1,76 \cdot 10^{14} \cdot 0,603}\right)^2\\ &= 7232\\ \alpha &= \frac{Nu \cdot \lambda}{l} = \frac{7232 \cdot 643,6 \cdot 10^{-3}\,\frac{W}{m\,K}}{5\,m} = 930,05\,\frac{W}{m^2\,K}\end{aligned}$$

Abgegebener Wärmestrom über beide Plattenseiten:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{konv} &= 2 \cdot \alpha \cdot H \cdot B \cdot (\vartheta_W - \vartheta_\infty)\\ &= 2 \cdot 930,05\frac{W}{m^2\,K} \cdot 5\,m \cdot 2\,m \cdot (80-20)K\\ &= 1116\,kW\end{aligned}$$

b) Die veränderte Temperatur der Plattenoberfläche würde nur geringfügig zu einer veränderung der Stoffwerte und damit zu einer Veränderung des Wärmeübergangskoeffizienten führen (Genauigkeitsbereich beachten). Daher kann das α aus Aufgabenteil a) verwendet werden.

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{konv} &= 2 \cdot \alpha \cdot H \cdot B \cdot (\vartheta_W - \vartheta_\infty)\\ &= 2 \cdot 930,05\frac{W}{m^2\,K} \cdot 5\,m \cdot 2\,m \cdot (86-20)K\\ &= 1228\,kW\end{aligned}$$

c) Zunächst wird die Temperatur in der Plattenmitte zur Zeit $t = 5\,min$ bestimmt. Die Länge L entspricht der halben Plattendicke ($L = \frac{d}{2} = 0,025\,m$)

$$Fo = \frac{a \cdot t}{L^2} = \frac{22,8 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s} \cdot 300\,s}{(0,025\,m)^2} = 10,944$$

$$\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha \cdot L} = \frac{81\,\frac{W}{m\,K}}{500\frac{W}{m^2\,K} \cdot 0,025\,m} = 6,48$$

Ablesen aus Diagramm 4.11:

$$0,2 = \frac{T_c - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

$$\Rightarrow T_c = T_\infty + 0,2 \cdot (T_i - T_\infty) = 20°C + 0,2 \cdot (80 - 20)°C = 32°C$$

Bestimmung der Temperatur $20\,mm$ ($x = 0,005\,m$ von Plattenmitte) unter der Plattenoberfläche:

$$\frac{x}{L} = \frac{0,005\,m}{0,025\,m} = 0,2$$

Das Diagramm 4.12 liefert hierzu, dass die Temperatur $T(x) = T_c$ ist. Folglich liegt auch die gesuchte Temperatur bei 32°C.

d) Beim Abkühlvorgang ist die Wärmestromdichte nicht in allen Schichten gleich groß, da sich nur bei einer stationären Wärmeleitung ein lineares Temperaturgefälle einstellt. Im instationären Fall liegen unterschiedliche Temperaturgradienten vor.

e) Der Wärmeübergangskoeffizient der oberen Platte kann aus dem Wärmeübergang der gesamten Platte und dem unteren Teil der Platte abgeleitet werden.

$$\dot{Q}_{ges} = \alpha_{ges} \cdot A_{ges} \cdot (\vartheta_W - \vartheta_\infty)$$

$$\dot{Q}_{unten} = \alpha_{unten} \cdot A_{unten} \cdot (\vartheta_W - \vartheta_\infty)$$

$$\dot{Q}_{oben} = \alpha_{oben} \cdot A_{oben} \cdot (\vartheta_W - \vartheta_\infty) = \dot{Q}_{ges} - \dot{Q}_{unten}$$

$$\Rightarrow \alpha_{oben} = \frac{\dot{Q}_{ges} - \dot{Q}_{unten}}{A_{oben}(\vartheta_W - \vartheta_\infty)} = \frac{\alpha_{ges} \cdot A_{ges} - \alpha_{unten} \cdot A_{unten}}{A_{oben}}$$

Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten für die gesamte Platte: Strömungsform: erzwungene Konvektion an einer ebenen Platte ($l = 5\,m$) (Stoffwerte siehe Teil a))

$$Re = \frac{w_0 \cdot l}{\nu} = \frac{5\,\frac{m}{s} \cdot 5\,m}{0,554 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}} = 4,51 \cdot 10^7$$

$$Nu_{ruhend} = 0$$

$$Nu_{lam} = 0,664 \cdot \sqrt{Re} \cdot \sqrt[3]{Pr} = 6806$$

$$Nu_{turb} = \frac{0,037 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr}{1 + 2,443 \cdot Re^{-0,1} \cdot \left(Pr^{\frac{2}{3}} - 1\right)} = 112219$$

$$Nu = Nu_{ruhend} + \sqrt{Nu_{laminar}^2 + Nu_{turb}^2} = 112425$$

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{l} = \frac{112425 \cdot 643,6 \cdot 10^{-3}\,\frac{W}{m\,K}}{5\,m} = 14458\,\frac{W}{m^2\,K}$$

Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten für die untere Plattenhälfte: Strömungsform: erzwungene Konvektion an einer ebenen Platte ($l = 2,5\,m$) (Stoffwerte siehe Teil a))

$$Re = \frac{w_0 \cdot l}{\nu} = \frac{5\,\frac{m}{s} \cdot 2,5\,m}{0,554 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}} = 2,26 \cdot 10^7$$

$$\begin{aligned}
Nu_{ruhend} &= 0 \\
Nu_{lam} &= 0,664 \cdot \sqrt{Re} \cdot \sqrt[3]{Pr} = 4813 \\
Nu_{turb} &= \frac{0,037 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr}{1 + 2,443 \cdot Re^{-0,1} \cdot \left(Pr^{\frac{2}{3}} - 1\right)} = 62839 \\
Nu &= Nu_{ruhend} + \sqrt{Nu_{laminar}^2 + Nu_{turb}^2} = 63023 \\
\alpha &= \frac{Nu \cdot \lambda}{l} = \frac{63023 \cdot 643,6 \cdot 10^{-3}\,\frac{W}{m\,K}}{2,5\,m} = 16210\,\frac{W}{m^2\,K}
\end{aligned}$$

Wärmeübergangskoeffizient für den oberen Plattenteil:

$$\begin{aligned}
\alpha_{oben} &= \frac{\alpha_{ges} \cdot A_{ges} - \alpha_{unten} \cdot A_{unten}}{A_{oben}} = \frac{14458\,\frac{W}{m^2\,K} \cdot 10\,m^2 - 16210\,\frac{W}{m^2\,K} \cdot 5\,m^2}{5\,m^2} \\
&= 12706\,\frac{W}{m^2\,K}
\end{aligned}$$