

Klausur zur Vorlesung Thermodynamik

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- bzw. Gedankengang muss stets erkennbar sein!
Interpolationsvorschriften und Stützstellen sind anzugeben.
Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Verwenden Sie ausschließlich die im Lehrbuch angegebenen Dampftafeln.
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

Aufgabe 1: *Mehrere Zustandsänderungen mit Wasser*

13 von 50 Punkten

Kurzfrage: Unter welchen Bedingungen lässt sich der isobare Ausdehnungskoeffizient für Wasser mit der Gleichung $\beta = \frac{1}{T}$ berechnen?

Eine Pumpe erhöht adiabt isentrop den Druck eines Wasserstroms von $p_1 = 0,25 \text{ bar}$ auf $p_2 = 50 \text{ bar}$. Die Temperatur des Wassers beträgt im Eintrittszustand $t_1 = 65^\circ\text{C}$. Die Pumpe nimmt eine Leistung von $\dot{W}_{t,1-2} = 35 \text{ kW}$ auf. Nach dem Durchlaufen der Pumpe wird dem Wasserstrom isobar ein Wärmestrom von $\dot{Q}_{2-3} = 19 \text{ MW}$ zugeführt. Die sich anschließende nicht-reversibel arbeitende erste Turbine einer mehrstufigen Anlage mit Zwischenüberhitzung expandiert das Wasser bis zu einem Zustand 4, der sich genau auf der Tauline befindet. Dabei gibt sie eine Leistung von $\dot{W}_{t,3-4} = 1,75 \text{ MW}$ ab. (Hinweis: Die Zwischenüberhitzung und die weiteren Stufen der Anlage werden in dieser Aufgabe nicht betrachtet.)

- Wie groß ist der betrachtete Massenstrom des Wassers?
- Wie groß ist die spezifische Enthalpie h_3 des Wassers nach der Wärmezufuhr?
- Wie groß ist der Druck p_4 nach der Expansion?
- Wie groß ist der isentrope Turbinenwirkungsgrad $\eta_{S,T}$ der Turbine? (Hinweis: Die spezifische Entropie s_3 im Eintrittszustand beträgt $s_3 = 6391 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$)

Lösung:

KF: Der isobare Ausdehnungskoeffizient für Wasser kann mit der Gleichung $\beta = \frac{1}{T}$ berechnet werden, wenn die Idealgasgleichung anwendbar ist. Also bei hohen Temperaturen und niedrigen Drücken.

- a) Die Tatsache, dass es sich um eine Pumpe und nicht um einen Verdichter handelt, signalisiert bereits, dass es sich um flüssiges Wasser handelt. Zustand 1 (0,25 bar und 65 °C) befindet sich genau auf der Siedelinie. Die Leistung, die eine Speisewasserpumpe zur Druckerhöhung von flüssigem Wasser benötigt, lässt sich als $w = v \cdot \Delta p$ berechnen. Hier also

$$w = 0,00102 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot (5000000 \text{ Pa} - 25000 \text{ Pa}) = 5074,5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Bei einer Gesamtleistung der Pumpe von 35 kW ergibt sich ein Massenstrom von

$$\dot{m} = \frac{\dot{W}_{t,1-2}}{w} = \frac{35000 \text{ W}}{5074,5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 6,897 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

- b) Im Zustand 1 hat das Wasser eine spezifische Enthalpie von $h_1 = 271900 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$. Nach der Druckerhöhung hat es eine Enthalpie von

$$h_2 = h_1 + w = 271900 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + 5074,5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 276974,5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Nach der Wärmezufuhr hat es eine Enthalpie von

$$h_3 = h_2 + \frac{\dot{Q}_{2-3}}{\dot{m}} = 276974,5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + \frac{19 \text{ MW}}{6,897 \frac{\text{kg}}{\text{s}}} = 3031703,1 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

- c) Im Zustand 4 befindet sich das Wasser auf der Taulinie und hat eine spezifische Enthalpie von

$$h_4 = h_3 - \frac{\dot{W}_{t,3-4}}{\dot{m}} = 3031703,1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} - \frac{1,75 \text{ MW}}{6,897 \frac{\text{kg}}{\text{s}}} = 2777978 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Also ist $h''(p) = 2777978 \text{ J/kg}$. p_4 lässt sich nun aus der Dampftafel direkt recht genau mit 10 bar ablesen. (Ggf. kann man hier noch interpolieren und kommt dann auf das noch genauere Ergebnis von $p_4 = 10,1 \text{ bar}$)

- d) Mit der gegebenen spez. Entropie $s_3 = 6391 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ ergibt sich ein fiktiver Endzustand $h_4^* = 2689689 \text{ J/kg}$ nach einer isentropen Expansion. Dieses Ergebnis lässt sich mit einer Interpolation zwischen h' und h'' bei $p = 10 \text{ bar}$ ermitteln, da $s_4 = s_3$ bekannt ist. Mit den nun bekannten h_3 , h_4 und h_4^* lässt sich der Wirkungsgrad zu $\eta_{s,T} = 0,742$ bestimmen.

Aufgabe 2: *Ideales Gas in einem zylinderförmigen Behälter* 20 von 50 Punkten

Kurzfrage: Bestimmen Sie den Joule-Thomson-Koeffizienten eines idealen Gases (2-atomig) bei $t = 20^\circ C$ und $p = 2 \text{ bar}$?

Es wird Helium als ideales Gas betrachtet, das sich in einem adiabaten, zylinderförmigen Gefäß befindet. Der ebenfalls adiabate Deckel des Gefäßes ist eine 2 cm hohe kreisförmige Platte aus Blei ($\rho = 11300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$), die sich in dem Zylinder ohne Reibung an den Wänden auf- und abwärts bewegen kann.

Im Ursprungszustand (Zustand 1) befindet sich die Unterseite des Deckels $z_1 = 10 \text{ cm}$ über dem Boden des Zylinders. Das von Zylinder und Deckel eingeschlossene Helium hat zu Beginn die Umgebungstemperatur $T_U = 20^\circ C$. Die Umgebungsluft hat einen Druck von $p_U = 100 \text{ kPa}$.

In einem ersten Schritt wird der Deckel langsam angehoben, bis sich seine Unterseite $z_2 = 15 \text{ cm}$ über dem Boden des Zylinders befindet. Diese Zustandsänderung (1-2) erfolgt reversibel.

Danach wird der Deckel losgelassen, fällt zunächst, schwingt dann eine Weile und kommt schließlich nur aufgrund von Dissipationseffekten innerhalb des eingeschlossenen Heliums zur Ruhe (Zustand 3).

- a) Bestimmen Sie den Druck p_1
- b) Bestimmen Sie die Temperatur T_2 und den Druck p_2 .
- c) Wie viel Arbeit W_{1-2} muss verrichtet werden, um den Deckel von z_1 auf z_2 anzuheben? (Gehen Sie ab hier von einem Radius des Deckels $r = 5 \text{ cm}$ aus.)
- d) Bestimmen Sie den Druck p_3 und die Höhe z_3 , in der der Deckel im Zustand 3 zur Ruhe kommt.

Lösung:

KF: Für ideale Gase gilt: $dh = c_p \cdot dT$. Bei einer isenthalpen Drosselung ändert sich daher die Temperatur überhaupt nicht. Der Joule-Thomson-Koeffizient $\left(\frac{dT}{dp}\right)_h$ ist also gleich Null.

- a) Der Druck p_1 ergibt sich aus dem Umgebungsdruck und den durch das Gewicht des Deckels verursachten Druck:

$$p_1 = p_U + g \cdot \rho_{Blei} \cdot 2 \text{ cm} = 100000 \text{ Pa} + (9,81 \cdot 11300 \cdot 0,02) \text{ Pa} = 102217 \text{ Pa}$$

- b) Der Deckel wird nun von 10 cm auf 15 cm angehoben. Damit gilt $\frac{V_1}{V_2} = 0,66666$. Da der Deckel adiabat und reversibel angehoben wird, gilt für diese Zustandsänderung (für ein ideales Gas):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa-1} \quad (\text{Tabelle D.14 im Buch Thermodynamik kompakt})$$

Mit dem bekannten Verhältnis $\frac{V_1}{V_2}$ und $\kappa = 1,666$ (einatomiges Edelgas) ergibt sich $T_2 = 223 \text{ K} = -49,43^\circ \text{C}$. Der Druck ergibt sich aus $p \cdot v = R \cdot T$, da die relative Temperaturänderung und die relative Volumenänderung bekannt sind: $p_2 = 52004 \text{ Pa}$. (Oder alternativ über das Verhältnis von p und v bei einer adiabat isentropen Zustandsänderung lt. Tabelle D.14.)

- c) Die benötigte Arbeit setzt sich zusammen aus der Arbeit AN der Umgebung, der Arbeit AM Deckel (pot. Energie steigt) und der Arbeit, die das eingeschlossene Helium verrichtet.

Die Masse des Deckels berechnet sich zu $m = 1,775 \text{ kg}$. Zum Anheben des Deckels werden also 0,87 Joule benötigt. Die Arbeit an der Umgebung beträgt

$$W_{Umg} = \Delta z \cdot \text{Grundfläche} \cdot p_U = 0,05 \text{ m} \cdot 0,00785 \text{ m}^2 \cdot 100000 \text{ Pa} = 39,27 \text{ J}$$

Die Arbeit am eingeschlossenen Helium berechnet sich lt. Tabelle D14 (Arbeit w_v für reversible, adiabate Zustandsänderung) zu $W_{He} = -28,52 \text{ J}$.

Insgesamt ergibt sich:

$$W_{ges} = W_{Deckel} + W_{Umg} + W_{He} = 0,87 \text{ J} + 39,27 \text{ J} - 28,52 \text{ J} = 11,62 \text{ J}$$

- d) Für den Druck p_3 gelten die gleichen Bedingungen wie für den Druck p_1 . Also gilt $p_3 = p_1 = 102217 \text{ Pa}$.

Nachdem nun p_3 bekannt ist, verbleiben die Unbekannten z_3 und T_3 , also die Position des Deckels und die Temperatur des Heliums. Eine Gleichung, die diese beiden Größen miteinander verknüpft ist $p \cdot v = R \cdot T$. Die zweite Gleichung ist eine Energiebilanz: Die innere Energie ($U_3 = m_{He} \cdot c_v \cdot T_3$) des Heliums im Zustand 3 muss so groß sein, wie die innere Energie ($U_2 = m_{He} \cdot c_v \cdot T_2$) des Heliums im Zustand 2 PLUS die Arbeit, die die Umgebung beim Absinken von $z_2 = 0,15 \text{ m}$ auf z_3 leistet

($W = (z_2 - z_3) \cdot A \cdot p_U$) PLUS die Änderung der potentiellen Energie des Deckels ($\Delta E_{pot} = (z_2 - z_3) \cdot g \cdot m_{Deckel}$).

Durch Einsetzen der Idealgasgleichung in die Energiebilanz ergibt sich nach dem Auflösen nach z:

$$z_3 = \frac{T_2 + \frac{(g \cdot m_D + p_U \cdot A)z_2}{m_{He} \cdot c_v}}{\frac{p_3 \cdot \pi \cdot r^2}{m_{He} \cdot R_{He}} + \frac{(g \cdot m_D) + (p_U \cdot A)}{m_{He} \cdot c_v}} = 0,1058.$$

Zum Lösen der Gleichung wurden folgende Werte verwendet:

- Masse des Deckels: $m_D = 1,775 \text{ kg}$
- Grundfläche: $A = 0,007854 \text{ m}^2$
- Masse des Heliums: $m_{He} = 0,00013185 \text{ kg}$
- Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen: $c_v = 3115,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
- Temperatur im Zustand 2: $T_2 = 223,72 \text{ K}$
- Erdbeschleunigung: $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- Umgebungsdruck: $p_U = 100000 \text{ Pa}$
- Höhe: $z_2 = 0,15 \text{ m}$
- Druck im Zustand 3: $p_3 = 102217 \text{ Pa}$
- Radius: $r = 0,05 \text{ m}$
- Spezifische Gaskonstante: $R_{He} = 2077,058 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

Aufgabe 3: *Feuchte Luft*

4 von 50 Punkten

Erklären Sie, ob die relative Feuchte φ von feuchter Luft ($t = 24^\circ\text{C}$, $p = 1 \text{ bar}$) steigt oder sinkt, wenn diese isochor erwärmt wird. (Hinweis: Das ist keine Kurzfrage. Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich und belegen Sie sie ggf. mit Stoffdaten aus dem Skript!)

Lösung:

Bei einer isochoren Erwärmung steigen sowohl die Temperatur als auch der Druck der feuchten Luft. Mit dem Gesamtdruck steigt auch der Wasserdampfpartialdruck. Mit steigender Temperatur steigt aber auch der Sättigungsdruck des Wassers. Da gilt $\varphi = \frac{p_D}{p_s}$ und sowohl p_D als auch p_s steigen, muss geprüft werden, welcher der beiden Drücke schneller steigt.

Willkürlich wird eine Erwärmung um 100 Prozent betrachtet, also von $24^\circ\text{C} = 297 \text{ K}$ auf 593 K . (Das kann auch mit anderen Temperaturänderungen nachvollzogen werden). Da sich feuchte Luft bei den betrachteten Drücken und Temperaturen wie ein ideales Gas verhält gilt: $p \cdot v = R \cdot T$. v und R sind konstant; also muss sich auch der Druck von 1 bar auf 2 bar verdoppeln. Damit verdoppelt sich auch der Partialdruck des Wassers. Wie man der Dampftafel entnehmen kann (bei 24°C und bei 320°C) steigt der Sättigungsdruck von 0,03 bar auf 115 bar; also fast um einen Faktor 4000.

Bei der Bestimmung der relativen Feuchte steigt der Zähler um einen Faktor 2, der Nenner jedoch fast um einen Faktor 4000. Also sinkt die relative Feuchte.

Kurzfrage: Welchen wichtigen Grundsatz der Thermodynamik verletzt ein Perpetuum mobile der 2. Art? (Denken Sie an eine knappe Begründung!)

Eine ideale, reibungsfreie Wärmekraftmaschine nutzt im Winter die Differenz zwischen der Temperatur des Grundwassers ($t_W = 8^\circ\text{C}$) und der Umgebungsluft ($t_L = -12^\circ\text{C}$), um technische Arbeit bereit zu stellen. Mit dieser Arbeit wird eine Wärmepumpe (Leistungszahl $\varepsilon = 3,3$) betrieben, die Wärme vom Umgebungstemperturniveau auf eine Temperatur $t_H = 30^\circ\text{C}$ bringt, um mittels einer Fußbodenheizung einen Wohnraum zu heizen.

- a) Zeichnen Sie für die beschriebene Anordnung ein Exergie/Anergie-Flussdiagramm, das die Wärmekraftmaschine und die Wärmepumpe sowie alle relevanten Energieflüsse enthält.
- b) Bestimmen Sie das Verhältnis von abgegebener Wärme (durch die Heizung) zu aufgenommener Wärme (durch die Wärmekraftmaschine).
- c) Durch welche Veränderung könnte man bei gleichen Temperaturniveaus, mit der gleichen Wärmekraftmaschine und der gleichen Wärmepumpe wahrscheinlich ein besseres Verhältnis als das unter b) berechnete erzielen?
- d) Wie groß ist der irreversible Arbeitsverlust der Wärmepumpe pro kJ Wärme, das die Wärmekraftmaschine aufnimmt?

Lösung:

KF: Ein Pm der 2. Art wandelt Wärme aus der Umgebung (=reine Anergie) in Exergie um. Dabei wird Entropie vernichtet und der 2. Hauptsatz verletzt.

- a) Die WKM nimmt viel Anergie und ein bisschen Exergie aus dem Grundwasser auf und gibt die Anergie komplett an die Luft und die Exergie komplett an die WP ab. Die WP nimmt zusätzlich reine Anergie aus der Umgebung (Luft) auf und reichert diese mit der Exergie von der WKM an. Dabei geht aber ein bisschen Exergie verloren. Die nun erhaltene Mischung aus Exergie (wenig) und Anergie (viel) wird an den Wohnraum abgegeben.
- b) Die WKM kann bestenfalls den Carnotwirkungsgrad von 0,0711 erreichen, der sich aus der Temperatur des Grundwassers und der Umgebungs(Luft)-Temperatur ergibt. Wird also z.B. 1 kJ aufgenommen, werden davon nur 0,0711 kJ an die WP als Arbeit weitergegeben. Diese hat eine Leistungszahl von 3,3. Das bedeutet, dass sie mit der zugeführten Arbeit insgesamt $0,0711 \text{ kJ} \cdot 3,3 = 0,235 \text{ kJ}$ Wärme bereitstellt. Das gesuchte Verhältnis beträgt also $\frac{0,235 \text{ kJ}}{1 \text{ kJ}} = 0,235$.
- c) Die WP sollte die Wärme lieber dem Grundwasser und nicht der kalten Umgebungsluft entnehmen. Dann hätte sie ziemlich sicher eine höhere (=bessere) Leistungszahl.
- d) Die Temperatur $T_U = 261,15 \text{ K}$ ist bekannt. Für die Formel

$$W_{V,irrev} = S_{prod} \cdot T_U$$

muss noch S_{prod} bestimmt werden:

Wenn die WKM 1 kJ ausnimmt, gibt Sie (s.o.) eine technische Arbeit von 0,0711 kJ an die WP ab, die wiederum 0,235 kJ Wärme abgibt. Nun muss für die WP sowohl eine Energiebilanz als auch eine Entropiebilanz aufgestellt werden. Die Energiebilanz ergibt, dass die WP 0,1636 kJ Wärme aus der Umgebung aufnimmt. Die Entropiebilanz ergibt, dass

$$S_{prod} = S_{ab} - S_{zu} = \frac{0,235 \text{ kJ}}{303,15 \text{ K}} - \frac{0,1636 \text{ kJ}}{261,15 \text{ K}} = 0,000148 \text{ kJ/K}$$

beträgt.

Der irrev. Arbeitsverlust in der WP beträgt also:

$$W_{V,irrev} = 0,000148 \text{ kJ/K} \cdot 261,15 \text{ K} = 0,0386 \text{ kJ}$$

pro kJ, das von der WKM aufgenommen wurde.