

## Klausur zur Vorlesung Thermodynamik

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- bzw. Gedankengang muss stets erkennbar sein!  
Interpolationsvorschriften und Stützstellen sind anzugeben.  
Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.  
Verwenden Sie ausschließlich die im Lehrbuch angegebenen Dampf tafeln.  
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

### Aufgabe 1: *Wasserfontäne*

10 von 50 Punkten

Kurzfrage: Um die Druckfestigkeit von neu gebauten Anlagen zu testen, werden diese mit flüssigem Wasser gefüllt, dessen Druck dann langsam erhöht wird bis der Testdruck erreicht ist oder aber bis die Anlage irgendwo platzt. Warum wird dieser Vorgang mit Wasser und nicht mit Luft vollzogen?

In einem See wird eine Pumpe betrieben, um eine Wasserfontäne, also einen nach oben gerichteter Wasserstrahl, zu erzeugen. Die Pumpe befindet sich auf Höhe des Wasserspiegels. Der Pumpe wird Wasser über eine Leitung zugeführt, die einen Radius  $r = 6 \text{ cm}$  hat. In dieser Leitung strömt das Wasser mit einer Geschwindigkeit  $c_{zu} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und bei einem Druck von  $p_{zu} = 2 \text{ bar}$ .

Die reversibel arbeitende Pumpe nimmt eine technische Leistung  $\dot{W}_t = 13 \text{ kW}$  auf.

Das Wasser vor und nach der Pumpe sowie die Umgebungsluft haben die Temperatur  $t_u = 20^\circ\text{C}$ . Das Wasser im See hat eine Temperatur  $t_{see} = 20,1^\circ\text{C}$ . Der Umgebungsdruck beträgt  $p_u = 1 \text{ bar}$

- a) Wie hoch ist die Fontäne maximal.
- b) Wird der See durch das zugeführte Wasser gekühlt oder erwärmt?

KF: Flüssiges Wasser ist fast inkompressibel. Es dehnt sich also bei einer Druckabsenkung nicht aus und leistet keine Volumenänderungsarbeit. Darum hat fl. Wasser unter hohem Druck auch im Gegensatz zu einem Gas fast keine Exergie und kann somit im Falle eines Platzen der Anlage auch nur wenig Schaden anrichten.

a) Die Aufgabe kann mit Bernoulli (Strömungsmechanik) gelöst werden oder aber über den 1. Hauptsatz: Betrachtet wird die Pumpe inkl. der Fontaine. Das Wasser tritt also mit 2 bar und 3 m/s ein und tritt auf der gesuchten Höhe mit einer Geschwindigkeit von 0 m/s aus. Außerdem müssen die 13 kW Pumpenleistung berücksichtigt werden. Es wird dabei davon ausgegangen, dass sich die Temperatur des Wassers und damit die innere Energie nicht ändert, da die maximale Höhe gesucht wird, also keine Dissipation stattfinden darf.

Zunächst wird der Massestrom als Produkt von Strömungsgeschwindigkeit, Querschnittsfläche ( $A = 0,0113\text{m}^2$ ) und der Dichte von fl. Wasser (1 kg/Liter) bestimmt: 33,929 kg/s

Die Energiebilanz (stationär) sieht dann wie folgt aus:

$$0 = \dot{m}((h_1 - h_2) + g(z_2 - z_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}) + \dot{W}_t$$

Da sich die innere Energie nicht ändert, wird aus  $h_2 - h_1 = p_2v - p_1v = v(p_2 - p_1)$

Insgesamt ergibt sich:

$$z_2 = z_1 + \frac{\frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + v(p_1 - p_2)}{g} = 49,709\text{ m}$$

b) An der Spitze der Fontaine hat das Wasser immer noch eine Temperatur von 20,0 °C. Danach fällt es aber nach unten, wird zunächst beschleunigt; dann aber bei Auftreffen auf den See wieder abgebremst. Die ursprünglich vorhandene potentielle Energie wird vollständig dissipiert und erhöht die innere Energie und damit die Temperatur des Wassers.

Die spezifische potentielle Energie kann also in eine Temperaturänderung unter Berücksichtigung der spezifischen Wärmekapazität umgerechnet werden:  $e_{pot} = g * z_2 = \Delta T c_{H_2O}$ .

$$T_3 = T_2 + \frac{g * z_2}{c_{H_2O}} = 20,116^\circ\text{C}$$

Das Wasser ist somit wärmer als der See und erwärmt ihn folglich.

**Aufgabe 2:** *Feuchte Luft*

14 von 50 Punkten

Kurzfrage: Wenn Sie Wasserdampf betrachten, der aus einem Schornstein entweicht, kann man diesen oft erst ein kleines Stück oberhalb der oberen Schornsteinkante sehen. Warum?

Es wird ein Liter feuchter Luft betrachtet. Der Druck ist  $p_1 = 1 \text{ bar}$ , die Temperatur ist  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  und der Wassergehalt ist  $x_1 = 0,01$ .

- a) Bestimmen Sie die Masse der trockenen Luft.

Berechnen Sie nach den folgenden Zustandsänderungen jeweils den Druck, die Temperatur, die relative Feuchte und ggf. die Masse des Wassers, das im flüssigen Zustand vorliegt. ACHTUNG: Die zwei genannten Zustandsänderungen erfolgen nicht nacheinander, sondern alternativ. Sie beginne also immer im oben beschriebenen Zustand 1.

- b) Isobare Erwärmung um  $10 \text{ K}$ .  
c) Isochore Druckabsenkung auf  $p_2 = 0,99 \text{ bar}$ .

KF: Echter Wasserdampf ist wie die meisten Gase transparent und somit für den Menschen nicht sichtbar. Kurz nach dem Verlassen des Schornsteins kondensiert der Dampf aber (zumidnest teilweise) aus und ist dann als Tröpfchen-Nebel mit dem Auge zu sehen.

a) Es gibt mehrere Wege, diese Aufgabe zu lösen. Einer könnte wie folgt aussehen: Aus der Wasserbeladung  $x$  ergibt sich, dass ein kg feuchter Luft aus 0,00990099 kg Wasser und 0,990099 kg trockene Luft besteht.

Über die Molmassen lässt sich dann berechnen, dass ein kg feuchter Luft aus 0,549445 mol Wasser und 34,1885 mol Luft besteht.

Aus der Idealgasgleichung ergibt sich, dass sich in einem Liter bei den gegebenen Bedingungen ( $T=293,15$  K,  $p=100000$  pas) 0,04103 mol Teilchen befinden.

Die feuchte Luft hat also eine Masse von  $\frac{0,04103 \text{ mol/l}}{0,549445 \text{ mol/kg} + 34,1885 \text{ mol/kg}} = 0,001181 \text{ kg/l}$

Die trockene Luft innerhalb des Liters hat eine Masse von  $0,001181 \text{ kg/l} * 0,990099 = 0,001169 \text{ kg/l}$

b) Nach einer Erwärmung um 10K hat die feuchte Luft eine Temperatur von  $30^\circ\text{C} = 303,15$  K. Der Druck beträgt unverändert 100000 pas. Der Wassergehalt unverändert  $x=0,01$ .

Der Sättigungsdruck  $p_s$  bei  $30^\circ\text{C}$  lässt sich aus der Dampftafel ablesen:  $p_s(30^\circ\text{C}) = 0,0424 \text{ bar}$ .

Der Dampfdruck  $p_D$  lässt sich aus dem Gesamtdruck und dem Wassergehalt berechnen:

$$p_D = p * \frac{x}{0,622+x} = 0,0158 \text{ bar}.$$

Daraus ergibt sich die relative Feuchte  $\phi = \frac{p_D}{p_s} = 0,373$ .

c) Aus dem neuen Druck  $p_2$  ergibt sich gemäß dem Idealgasgesetz eine neue Temperatur  $T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 290,22 \text{ K}$ .

Durch Interpolation zwischen  $15^\circ\text{C}$  und  $20^\circ\text{C}$  lässt sich für die Temperatur  $T_2$  der zugehörige Sättigungsdruck  $p_s(17,07^\circ\text{C}) = 0,01965 \text{ bar}$  bestimmen.

Das in b) bereits beschriebene Vorgehen unter Berücksichtigung des veränderten Gesamtdrucks  $p_2 = 0,99 \text{ bar}$  liefert nun einen Dampfdruck von  $p_D = 0,01566 \text{ bar}$ .

Daraus ergibt sich eine relative Feuchte von  $\phi = 0,797$ .

**Aufgabe 3:** *Reales Gas*

12 von 50 Punkten

Das reales Gas in einer Sprüh-Dose wird durch die folgende thermische Zustandsgleichung beschrieben:  $V_m = \frac{R_m T}{p} + a - b \cdot T$ .

Die Konstanten a und b haben dabei folgende Werte:  $a = 0,0475 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$  und  $b = 0,0154 \frac{\text{m}^3}{\text{K kmol}}$ . Das Gas hat eine molare Wärmekapazität  $C_{p,m} = 27,021 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol K}}$ .

Bei einem Sprühvorgang sinkt der Druck in der Dose von  $p_1 = 3 \text{ bar}$  auf  $p_2 = 2,8 \text{ bar}$ . Der Sprühvorgang vollzieht sich in so kurzer Zeit, dass keine Wärme von außen zugeführt wird. Weiterhin soll der Vorgang innerhalb der Dose reversibel erfolgen. Das Gas in der Dose hat vor dem Sprühvorgang Umgebungstemperatur  $T_u = 20^\circ\text{C}$ . Die Dose hat ein Volumen  $V = 160 \text{ cm}^3$

- a) Wie groß ist die Stoffmenge des während des Sprühvorgang ausgetretenen Gases unter der Annahme, dass die Temperatur des Gases in der Flasche dabei auf  $T_2 = 13,84^\circ\text{C}$  sinkt?
- b) Prüfen Sie, ob die in a) getroffene Annahme der Temperatur des Gases in der Flasche direkt nach Beendigung des Sprühvorgangs korrekt ist?

a) Mit den gegebenen Werten und der gegebenen thermischen Zustandsgleichung ergeben sich für den Zustand vor bzw. nach dem Sprühen die folgenden zwei molaren Volumina:

$$V_{M,1} = 0,003657 \text{ m}^3/\text{mol} \text{ und } V_{M,2} = 0,004149 \text{ m}^3/\text{mol}$$

Unter Berücksichtigung des Gesamtvolumens der Dose von  $V = 0,00016 \text{ m}^3$  ergibt sich als Differenz des Doseninhalts und damit als ausgesprühte Stoffmenge

$$\Delta n = \frac{V}{V_{M,1}} - \frac{V}{V_{M,2}} = 0,00519 \text{ mol}$$

b) Da der Vorgang innerhalb der Dose reversibel und adiabat ablaufen soll, muss die spezifische bzw. die molare Entropie konstant bleiben. (Die absolute Entropie sinkt natürlich, da Stoff und damit auch dessen Entropie aus der Dose austritt. Betrachtet wird aber nur der Stoff, der von Beginn bis Ende des Sprühvorgangs innerhalb der Dose verbleibt.)

Für die molare Entropie lässt sich aus Anhang B des Lehrbuchs Thermodynamik kompakt die folgende Beziehung herleiten:

$$dS_M = \frac{C_{p,m}}{T} dT - (dV_M/dT) dp.$$

Da  $dS_M = 0$  ergibt sich  $\frac{C_{p,m}}{T} dT = (dV_M/dT) dp.$

Die partielle Ableitung  $dV_M/dT$  lässt sich mit der gegebenen thermischen Zustandsgleichung zu  $dV_M/dT = \frac{R_m}{p} - b$  bestimmen. Also ergibt sich:

$$\frac{C_{p,m}}{T} dT = \left(\frac{R_m}{p} - b\right) dp$$

Nun kann über beide Seiten von Beginn bis zum Schluss des Sprühvorgangs integriert werden, so dass sich folgende Gleichung ergibt

$$C_{p,m} \ln(T_2/T_1) = R_m \ln(p_2/p_1) - b(p_2 - p_1)$$

Entweder setzt man zum Überprüfen nun die bekannten Werte auf beiden Seiten ein, vergleicht die Zahlenwerte und stellt fest, dass diese voneinander abweichen. Oder man löst die Gleichung nach  $T_2$  auf und erhält den Wert  $T_2 = 290,28 \text{ K} = 17,13^\circ \text{ C}$ .

Die unter a) getroffene Annahme für die Temperatur nach dem Sprühvorgang war also falsch.

Kurzfrage: Ein Erfinder behauptet, dass er eine Kühltisch entwickelt habe, der eine Kälteleistung bereitstellt, die 100,0% der zugeführten technischen Leistung entspricht. Halten Sie das für glaubwürdig?

In einem Kreisprozess mit einem umlaufenden Massestrom vom  $\dot{m} = 1,4 \frac{kg}{s}$  des Arbeitsmediums R-290 werden folgende Schritte durchlaufen:

- 1-2 Isobare Wärmeabfuhr bis zum Erreichen der Siedelinie
- 2-3 Isenthalpe Drosselung auf  $p_3 = 3,6 \text{ bar}$ .
- 3-4 Isobare Wärmezufuhr bis das Arbeitsmedium um  $12 \text{ K}$  überhitzt ist.
- 4-1 Kompression auf 20 bar (Leistungsaufnahme des Verdichters:  $\dot{W}_t = 125 \text{ kW}$ )

Stoffwerte für R – 290 (gasförmig)

spezifische Enthalpie [kJ/kg] in Abhängigkeit von Druck und Temperatur:

	274,9 K	284,9 K	344,8 K	351,1 K
3,6 bar	582,6	599,6	708,1	720,3
5,0 bar	576,8	594,4	705,0	717,3
6,7 bar	-	587,5	701,1	713,6
20 bar	-	-	662,4	678,0

spezifische Entropie [kJ/kg K] in Abhängigkeit von Druck und Temperatur:

	274,9 K	284,9 K	344,8 K	351,1 K
3,6 bar	2,4478	2,5085	2,8535	2,8884
5,0 bar	2,3705	2,4334	2,7853	2,8206
6,7 bar	-	2,3611	2,7227	2,7585
20 bar	-	-	2,4334	2,4769

Stoffwerte für R – 290 (Naßdampfgebiet)

p [bar]	T[K]	h' [kJ/kg]	h'' [kJ/kg]	s' [kJ/kgK]	s'' [kJ/kgK]
2,0	247,7	138,54	545,75	0,7659	2,4099
3,6	264,2	178,44	565,09	0,9206	2,3829
5,0	274,9	204,33	576,77	1,0156	2,3705
6,7	284,9	229,87	587,49	1,1057	2,3611
12,3	308,6	294,02	610,37	1,3181	2,3433
20,0	330,4	359,36	626,02	1,5172	2,3243
25,0	341,4	395,71	630,11	1,6219	2,3085

Lösen Sie folgende Aufgaben, die sich auf den oben beschriebenen Kreisprozess (vorangegangene Seite) beziehen:

- a) Zeichnen Sie den Prozess in ein T-s Diagramm ein!
- b) Bestimmen Sie für alle vier Eckpunkte die Temperatur und den Druck, sowie für Punkt 2,3 und 4 den Dampfgehalt  $x$  sofern diese Punkte im Naßdampfgebiet liegen.
- c) Bestimmen Sie den isentropen Verdichterwirkungsgrad (Schritt 4-1)?
- d) Wie groß ist die Differenz zwischen dem vom Prozess aufgenommen und dem vom Prozess abgegeben Wärmestrom?



KF: Das ist natürlich möglich. Dabei handelt es sich dann sogar nur um einen ziemlich miesen Kühltisch mit einer Kälteleistungszahl von 1. Hier ist locker das doppelte oder sogar dreifache möglich.

a) Siehe Kaltdampfprozess.

b) Alle Drücke lassen sich direkt aus der Aufgabenstellung ablesen:  $p_1 = p_2 = 20\text{bar}$  und  $p_3 = p_4 = 3,6\text{bar}$ .

$$T_2 = T_s(20\text{bar}) = 330,4\text{K}$$

$$T_3 = T_s(3,6\text{bar}) = 264,2\text{K}$$

$$T_4 = T_3 + 12\text{K} = 276,2\text{K}$$

Etwas schwieriger ist es,  $T_1$  zu bestimmen. Dafür muss man zunächst die Enthalpie  $h_1$  aus der  $h_4 = 584,81\text{kJ/kg}$  (Interpolation im Gasgebiet) und der Leistung des Verdichters pro kg bestimmen:

$$h_1 = h_4 + \frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} = 674,10\text{kJ/kg}.$$

Mit diesem Wert lässt sich auch  $T_1 = 349,52\text{K}$  mittels Interpolation im Gasgebiet bestimmen.

c) Ebenfalls durch Interpolation lässt sich die Enthalpie des Zustands 1\* (nach einer gedachten isentropen ZÄ 4-1\*) zu  $h_{1*} = 670,36\text{kJ/kg}$  bestimmen. Dazu verwendet man  $s_{1*} = s_4 = 2,455691\text{kJ/kgK}$ .

Aus  $h_{1*}$ , der tatsächlichen Enthalpie  $h_1 = 674,10$  und der Enthalpie im Zustand 4  $h_4 = 584,81\text{kJ/kg}$  lässt sich der gesuchte Wirkungsgrad  $\eta_{S,V} = \frac{h_{1*} - h_4}{h_1 - h_4} = 0,959$  berechnen.

d) Die Differenz zwischen aufgenommener und abgegebener Wärme ist die Leistungsaufnahme des Verdichters. Also 125kW. (Einfach eine Energiebilanz um den gesamten Kreislauf machen!  $\dot{Q}_{raus} = \dot{Q}_{rein} + \dot{W}_{t,rein}$ )