Institut für Thermodynamik
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

9. März 2011

Klausur zur Vorlesung

Wärme- und Stoffübertragung

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- und Gedankengang muss erkennbar sein!
Interpolationsvorschriften und Stützstellen sind anzugeben.
Hilfsmittel sind zugelassen, Verwenden Sie, sofern benötigt, die Gröberdiagramme aus dem Skript. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

Aufgabe 1: *Regentropfen* 15 von 50 Punkten

Kurzfrage: In welchen Fällen muss bei der Bestimmung eines Wärmeübergangs eine Ackermann-Korrektur berücksichtigt werden?

Ein kugelförmiger Regentropfen mit einem Durchmesser $D_T = 1\,mm$, der an einem windstillen Tag in Braunschweig mit einer konstanten Geschwindigkeit $c_T = 6\,\frac{m}{s}$ nach unten fällt, habe eine Temperatur $t_T = 5°C$. Die umgebende Luft habe eine Temperatur $t_L = 15°C$. Aufgrund dieser Temperaturdifferenz fließt Wärme von der Umgebung in den Tropfen.

Gehen Sie davon aus, dass das Wasser des Tropfens nicht verdunstet und deshalb keine Stoffübertragunsphänomene zu berücksichtigen sind.

a) Handelt es sich bei dem vorliegenden Fall um freie oder erzwungene Konvektion?

b) Bestimmen Sie den Wärmeübergangskoeffizienten α des Regentropfens.

c) Wie groß ist der vom Regentropfen aufgenommene Wärmestrom $\dot{Q}$ zum betrachteten Zeitpunkt.

d) Wie groß ist die zeitliche Änderung der Temperatur des Tropfens $\frac{dT}{dt}$ unter der Annahme, dass die Temperatur des Tropfens räumlich konstant ist, dass also überall im Tropfen die gleiche Temperatur vorliegt. Wie lange dauert es, bis sich der Tropfen auf 5,1$°C$ erwärmt hat?

KF: Sie muss bei gleichzeitigem Wärme- und Stofftransport berücksichtigt werden.

a) Da bei es einem fallenden Tropfen eine Relativbewegung zwischen Luft und tropfen gibt, handelt es sich um eine erzwungene Konvektion.

b) Zunächst müssen die Stoffwerte für Luft bei der mittleren Temperatur von 10°C bestimmt werden. Dann kann mit der charakteristischen Länge von 0,001m eine Reynoldszahl von 415,66 ermittelt werden.

Es ergeben sich gemäß der Nu-Beziehungen für erzwungene Konvektion an umströmten Körpern (Kugel):

$Nu_{ruh} = 2$
$Nu_{lam} = 12{,}113$
$Nu_{turb} = 4{,}497$
$Nu_{gesamt} = 14,92$

Daraus ergibt sich für den Wärmeübergangskoeffizienten: $\alpha = 372\frac{W}{m^2K}$

c) Der Wärmestrom lässt sich als Produkt aus Wärmeübergangskoeffizient, Temperaturdifferenz zur Umgebung (=10K) und Oberfläche des kugelförmigen Tropfens (=0,000003141 m^2) zu 0,0117W bestimmen.

d)$m * c * \frac{dT}{dt} = A * \alpha * (T_L - T(t))$

$\frac{1}{(T_L - T(t))}dT = \frac{A*\alpha}{m*c}dt$

$ln(\frac{T_L - T_a}{T_L - T_e}) = \frac{A*\alpha}{m*c}\Delta t$

Mit der Wärmekapazität für flüssiges Wasser und einer Masse $m = 5{,}23 * 10^{-7}kg$ ergibt sich: $\Delta t = 0,0188$ Sekunden.

Aufgabe 2: *Strahlung* 17 von 50 Punkten

Kurzfrage: Welches grundsätzliche mathematische Vorgehen muss gewählt werden, um aus einer gegebenen hemisphärischen, spektralen Ausstrahlung auf eine hemisphärische gesamte Ausstrahlung zu schließen?

In einem Zwillingssternsystem bewegen sich zwei Sterne S_1 und S_2 auf elliptischen Bahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

Zu dem betrachteten Zeitpunkt haben die beiden Sterne einen Abstand von 0,5 Milliarden Kilometern. S_1 und S_2 haben jeweils die Form einer Kugel mit den Radien $R_{S1} = 3$ Millionen Kilometer und $R_{S2} = 5$ Millionen Kilometer. Beide Sterne sollen sich wie schwarze Strahler mit den Temperaturen $T_{S1} = 9000\,K$ und $T_{S2} = 14000\,K$ verhalten. Das übrige Weltall verhalte sich ebenfalls wie schwarzer Strahler mit einer Temperatur von $T_{All} = 0\,K$. (Die Hintergrundstrahlung wird vernachlässigt)

Die von den Sternen abgestrahlte Energie soll ausschließlich durch Kernfusion im Inneren der Sterne bereitgestellt. Nach der von Einstein stammenden Masse-Energie-Äquivalenzformel $E = mc^2$ sinkt dadurch die Masse der Sterne. ($c = Lichtgeschwindigkeit = 300000\,\frac{km}{s}$)

a) Bestimmen Sie die Sichtfaktoren $F_{1,2}$ und $F_{2,1}$, jeweils von einem Stern auf den anderen.

b) Bestimmen Sie den Strahlungsfluss Φ_{12} sowie den Wärmestrom $\dot{Q}_{21}$, der von dem Stern S_2 zu dem Stern S_1 fließt.

c) Welcher der beiden Sterne hat bei einer Wellenlänge von $\lambda = 250\,nm$ die größere spektrale Ausstrahlung? Denken Sie daran, Ihre Antwort zu begründen!

d) Um welche Masse Δm sinkt die Masse des Sterns S_1 in einer Minute, um die für die Strahlung benötigte Energie bereitzustellen.

KF: Es muss über das gesamte Wellenlängenspektrum integriert werden.

a) Der Sichtfaktor von S1 auf S2 ist gleich dem Verhältnis der aus Sicht von S1 sichtbaren kreisförmigen Fläche von S2 (7,85 $* 10^{19} m^2$) bezogen auf die Oberfläche (3,14 $* 10^{24} m^2$) einer gedachten Kugel, deren Radius gleich dem Abstand zwischen den beiden Sternen S1 und S2 ist.

$F_{1,2} = 0,000025$

Über die Reziprozitätsbeziehung und die Oberflächen der beiden Sterne (S1:1,131$*10^{20} m^2$ und S2:3,142 $* 10^{20} m^2$ kann der umgekehrte Sichtfaktor ermittelt werden:

$F_{2,1} = 0,0000090$

b) Der Strahlenfluss $\Phi_{1,2}$ lässt sich aus der Oberfläche des Sterns S1, seiner Temperatur und dem Sichtfaktor $F_{1,2}$ berechnen:

$\Phi_{1,2} = F_{1,2} * A_1 * \sigma * {T_1}^4 = 1,05 * 10^{24}\, W$

genauso lässt sich der Strahlenfluss von Stern 2 zu Stern 1 berechnen:

$\Phi_{2,1} = F_{2,1} * A_2 * \sigma * {T_2}^4 = 6,16 * 10^{24}\, W$

Der gesuchte Wärmestrom ist die Differenz der beiden Strahlenflüsse:

$Q_{2,1} = \Phi_{2,1} - \Phi_{1,2} = 5,11 * 10^{24}\, W$

c) Da beide Körper den gleichen Emissionskoeffizienten haben (schwarzer Strahler: $\epsilon = 1$), hat der Körper mit der höheren Temperatur, also S2, bei ALLEN Wellenlängen die höhere spektrale Ausstrahlung.

d) Der Stern S1 gibt pro Sekunde die folgende Energie ab:

$A_1 * \sigma * {T_1}^4 = 4,21 * 10^{28}\, J$

Gleichzeitig empfängt er von Stern 2 die bereits berechnete Leistung:
$\Phi_{2,1} = F_{2,1} * A_2 * \sigma * {T_2}^4 = 6,16 * 10^{24}\, W$

Man kann nun erkennen, dass diese empfangene Leistung relativ zur Ausstrahlung sehr klein ist und vernachlässigt werden kann.

Der auftretende Massedefekt beträgt also:
$dm/dt = \frac{4{,}21*10^{28}\, J}{300000\, km/s} = 4,67 * 10^{11}\, kg/s = 2,80 * 10^{13}\, kg/min$

Aufgabe 3: *Thermoskanne* 18 von 50 Punkten

Kurzfrage:Warum ist die folgende Differentialgleichung nicht geeignet um das Temperaturfeld eines radioaktiven Kernbrennstabs zu beschreiben: $\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T$

In eine zylinderförmige Stahlflasche für Getränke mit einem Innenradius $r_i = 4\,cm$ und einer Höhe $H = 30\,cm$ wird heißer Kaffee mit einer Temperatur von $t_K = 70°C$ gegossen.

Die Stahlwand, die vor dem Eingießen die Umgebungstemperatur $t_U = 20°C$ hat, ist $2\,mm$ dick. Der Zylindermantel ist außen mit einer Schaumstoffschicht bedeckt, die $5\,mm$ dick ist und eine Wärmeleitfähigkeit $\lambda_S = 0{,}110\,\frac{W}{K\,m}$ hat. Der Deckel der Flasche soll als adiabat angenommen werden. Der Wärmeübergangskoeffizient auf der gesamten Innenseite der Flasche beträgt $\alpha_i = 30\,\frac{W}{K\,m}$, auf der Außenseite der Isolierung $\alpha_I = 8\,\frac{W}{K\,m}$ und auf der Außenseite der kreisförmigen, nicht isolierten, Bodenfläche $\alpha_I = 5\,\frac{W}{K\,m}$;

Folgende Werte sind bekannt:

λ_{Stahl}	$c_{p,Stahl}$	ρ_{Stahl}	λ_{Luft}	ρ_{Luft}
$20\,\frac{W}{K\,m}$	$0{,}47\,\frac{J}{g\,K}$	$7900\,\frac{kg}{m^3}$	$0{,}026\,\frac{W}{K\,m}$	$1{,}2\,\frac{kg}{m^3}$

Gehen Sie davon aus, dass der Kontaktwiderstand zwischen Zylindermantel der Stahlfalsche und der Schaumstoffisolierung vernachlässigbar klein ist.

a) Welchen kA-Wert hat die gesamte Flasche inklusive Isolierung?

b) Wie lange dauert es, bis sich die Außenseite des stählernen Zylindermantels auf eine Temperatur von 20,01 °C erwärmt hat. Behandeln Sie den Zylindermantel für diesen Aufgabenteil wie eine ebene Platte. Gehen Sie weiterhin vereinfachend davon aus, dass der Innenseite der Flasche beim Einfüllen die Temperatur des Kaffees aufgeprägt wird.

c) Wenn sich die Temperatur des Getränks zeitlich nicht veränderte, z.B. durch eine Heizung, welcher stationäre Wärmestrom $\dot{Q}$ würde sich dann nach langer Zeit einstellen, der vom Getränk in die Umgebung fließt.

d) Ist der anfängliche Wärmestrom, der das heiße Getränk direkt nach dem Einfüllen verlässt, größer, kleiner oder genau so groß, wie der unter c) berechnete Wärmestrom. Denken Sie daran, Ihre Antwort zu begründen.

e) Ideales Vakuum hat eine Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{Vak} = 0$. Deshalb besitzen viele moderne Isolierflaschen für heiße Getränke einen Vakuumkammer zwischen Innenwand und Außenwand. Warum überträgt aber auch diese Isolierung Wärme?

KF: Die gegebene Gleichung beinhaltet keine Quellterme, die bei einem Kernbrennstab vorhanden sein müssen, da hier Wärme entsteht.

a) Zunächst sollte man alle Wärmeübergangs- und Wärmeleitwiderstände berechnen:

Für den Mantel:

$R_i = \frac{1}{\alpha_i * A_i} = 0{,}442\,\frac{K}{W}$
$R_{\lambda,1} = \frac{ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi * H * \lambda_{Stahl}} = 0{,}00129\,\frac{K}{W}$
$R_{\lambda,2} = \frac{ln(\frac{r_3}{r_2})}{2\pi * H * \lambda_{Schaum}} = 0{,}542\,\frac{K}{W}$
$R_a = \frac{1}{\alpha_a * A_a} = 1{,}411\,\frac{K}{W}$
$R_{ges,Mantel} = R_i + R_{\lambda,1} + R_{\lambda,2} + R_a = 2,40\,\frac{K}{W}$

Für den Boden:

$R_i = \frac{1}{\alpha_i * A_B} = 6{,}631\,\frac{K}{W}$
$R_\lambda = \frac{d)}{A_B * \lambda_{Stahl}} = 0{,}0199\,\frac{K}{W}$
$R_a = \frac{1}{\alpha_u * A_B} = 39{,}79\,\frac{K}{W}$
$R_{ges,Boden} = R_i + R_\lambda + R_a = 46,4\,\frac{K}{W}$

Gesamtwiderstand der Flasche: $R_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{R_{ges,Mantel}} + \frac{1}{R_{ges,Boden}}} = 2,28,\,\frac{K}{W}$

$kA = 1/R_{ges} = 0,43\,\frac{W}{K}$

b) Diese Aufgabe kann unter der Annahme gelöst werden, dass sich die Stahlwand wie ein halbunendlicher Körper verhält:

$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = 0,00020 = erfc(\frac{x}{\sqrt{4at}})$
Die Temperaturleitfähigkeit a lässt sich aus den gegeben Stoffwerten berechnen.

Aus der vertafelten Errorfunktion ergibt sich:

$0{,}0002 = erfc(2{,}6353)$

$t = \frac{(\frac{0{,}002}{2{,}6353})^2}{4a} = 0{,}0267s$

c)$\dot{Q} = (70 - 50)K * kA = 21,94\,W$

d) Direkt nach dem Einfüllen hat die Stahlwand noch die Umgebungstemperatur T=20°C. Der Widerstand zwischen Flüssigkeit und Wand ist aber natürlich geringer als Zwischen Flüssigkeit und Umgebungsluft. Da also verglichen mit Teil c) bei gleicher Temperaturdifferenz einer kleiner Widerstand vorliegt, muss der Wärmestrom größer sein.

e) Mehrere Gründe: 1) Strahlung, 2) Es handelt sich bei Vakuumkammern in Thermoskannen nie um ein perfektes Vakuum, 3) Die Innenflasche muss irgendwo mit der äußeren Flasche verbunden sein; sie kann nicht im Inneren 'schweben'.