Institut für Thermodynamik
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

19. März 2010

Lösung der Klausur

Wärme- und Stoffübertragung

Wintersemester 2010

Aufgabe 1: *Konvektive Wärmeübertragung an einer Autobrücke* 16 von 50 Punkten

Kurzfrage: Wird der für eine Bierdose im Kühlschrank auf der Erde bestimmte Wärmeübergangskoeffizient kleiner oder größer, wenn der Kühlschrank nicht mehr auf der Erde, sondern in der Raumstation ISS steht? (Bei gleichen Temperaturen und gleichem Luftdruck wie auf der Erde)

Antwort: Da auf der ISS Schwerelosigkeit (g=0) herrscht gilt für den im Kühlschrank vorliegenden Fall(Freie Konvektion an einem aufrechtstehenden Zylinder), dass die benötigte Grashof-Zahl gleich Null wird. Im Folgenden werden die Rayleigh-Zahl gleich Null und somit wird die Nußelt-Zahl einen geringeren Wert als auf der Erde annehmen.Der auf der ISS bestimmte Wärmeübergangskoeffizient α wird also kleiner sein als der auf der Erde bestimmte(Obwohl Luftdruck und Temperaturen die selben sind).

Zusammenfassung der Aufgabenstellung:Die in der Aufgabenstellung betrachtete Brücke kann vereinfacht als überströmte Platte angesehen werden. Desweiteren sind für die Berrechnung der Aufgabe folgende Werte gegeben:

- Breite je Fahrspur: $5\,m$
- Geschwindigkeit der Anströmung: $20\,km/h$ (von der rechten Seite). An der Unterseite wird keine Wärme abgegeben.
- Temperatur der Brückenoberfläche: 5°C bzw. 278,15 K
- Temperatur der umgebenden Luft: -5°C bzw. 268,15 K
- Mittlerer Wärmeübergangskoeffizient der gesamten Brückenoberfläche $\alpha_{ges} = 14{,}33 \frac{W}{m^2 K}$

Aufgabenteil a)

Es liegt eine von der Seite erzwungen angeströmte ebene Platte vor. Zur Lösung der Aufgabe werden die mittleren Stoffwerte benutzt(Anhang im Skript):

$$\frac{1}{2}\cdot(\vartheta_F+\vartheta_K)=\vartheta_M=0°\mathrm{C}$$

Tabelle B 1: Stoffwerte von Luft beim Druck $p = 1$ bar

ϑ °C	ϱ kg/m³	c_p kJ/kg K	β 10^{-3}/K	λ 10^{-3}W/K m	ν 10^{-7}m²/s	a 10^{-7}m²/s	Pr —
−200	5,106	1,186	17,24	6,886	9,786	11,37	0,8606
−180	3,851	1,071	11,83	8,775	17,20	21,27	0,8086
−160	3,126	1,036	9,293	10,64	25,58	32,86	0,7784
−140	2,639	1,010	7,726	12,47	35,22	46,77	0,7530
−120	2,287	1,014	6,657	14,26	46,14	61,50	0,7502
−100	2,019	1,011	5,852	16,02	58,29	78,51	0,7423
−80	1,807	1,009	5,227	17,74	71,59	97,30	0,7357
−60	1,636	1,007	4,725	19,41	85,98	117,8	0,7301
−40	1,495	1,007	4,313	21,04	101,4	139,7	0,7258
−20	1,377	1,007	3,968	22,63	117,8	163,3	0,7215
0	1,275	1,006	3,674	24,18	135,2	188,3	0,7179
[illegible]	[illegible]	[illegible]	3,421	[illegible]	153,5	214,7	0,7148
40	1,112	1,007	3,200	27,16	172,6	242,4	0,7122
80	0,9859	1,010	2,836	30,01	213,5	301,4	0,7083
100	0,9329	1,012	2,683	31,39	235,1	332,6	0,7070
120	0,8854	1,014	2,546	32,75	257,5	364,8	0,7060
140	0,8425	1,016	2,422	34,08	280,7	398,0	0,7054
160	0,8036	1,019	2,310	35,39	304,6	432,1	0,7050

Mit diesen Werten und der Gleichung

$$\mathrm{Re}=\frac{\omega\cdot l}{\nu}$$

Kann nun nach Umrechnung der Anströmgeschwindigkeit die Reynoldszahl Re errechnet werden.

$$\omega=5{,}5556\frac{m}{s} \text{ und } \nu= 135{,}2\cdot10^{-7}\frac{m^2}{s}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{\omega\cdot l}{\nu} =\frac{5{,}5556\frac{m}{s}\cdot 5m}{135{,}2\cdot10^{-7}\frac{m^2}{s}}=2054571{,}006$$

Mit

$$\mathrm{Re}=2054571{,}006 \text{ und } \mathrm{Pr}=0{,}7179$$

Kann nun Nu_{lam} und Nu_{turb} errechnet werden

$$\mathrm{Nu}_{lam} = 0,664 \cdot \sqrt{Re} \cdot \sqrt[3]{Pr} = 852,21623$$
$$\mathrm{Nu}_{turb} = \frac{0{,}037 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr}{1+2{,}443 \cdot Re^{-0,1} \cdot (\sqrt[3]{Pr^2}-1)} = 3362,14983$$

Nu_{ges}=Nu errechnet sich mit

$$\mathrm{Nu}{=}\mathrm{Nu}_{ruhend} + \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2}$$

und Nu_{ruhend}=0 als Tabellenwert zu

$$\mathrm{Nu}{=}3468{,}47575$$

Mit der Beziehung

$$\mathrm{Nu}{=}\frac{\alpha_R \cdot l}{\lambda}$$

Ergibt sich α_R zu

$$\alpha_R = 16{,}77 \frac{W}{m^2K}$$

Aufgabenteil b)

Mit dem gegebenen α_{Ges} und dem unter a) errechneten α_R können nun $\dot{Q_{Ges}}$ und $\dot{Q}_R$ bestimmt werden.

$$\dot{Q}_{Ges} = \alpha_{Ges} \cdot A_{Ges} \cdot \Delta T \text{ und } \dot{Q}_R = \alpha_R \cdot A_R \cdot \Delta T$$
$$\dot{Q}_{Ges} = 14,33 \frac{W}{m^2K} \cdot 800m^2 \cdot 10°C$$
$$\dot{Q}_R = 16,77 \frac{W}{m^2K} \cdot 400m^2 \cdot 10°C$$
$$\dot{Q}_{Ges} - \dot{Q}_R = \dot{Q}_L$$
$$\dot{Q}_L{=}47545{,}8052 \text{ W}$$

Aufgabenteil c)

Mit dem aus b) bekannten Wert für $\dot{Q}_L$ und der Geichung

$$\dot{Q}_L = \alpha_L \cdot A_L \cdot \Delta T$$

ergibt sich α_L zu

$$\alpha_L = 11{,}8865 \, \frac{W}{m^2 K}$$

Aufgabenteil d)

Auf der linken Fahrbahn hat sich bereits eine Grenzschicht (die wie eine Isolierung wirkt) entwickelt auf der rechten Seite nicht.

Aufgabenteil e)

Da die Unterseite der Brücke adiabat ist ist die Temperatur der Unterseite T_U gleich der Temperatur der Umgebung T_L also T_U= -5°C.

Aufgabe 2: *Abkühlen einer Wassertonne* 15 von 50 Punkten

Kurzfrage: Bei welcher Randbedingung (1. bis 3. Art) spielen Stoffeigenschaften des umgebenden Fluids eine Rolle? (Denken Sie daran, Ihre Antwort knapp zu begründen.)

Antwort:In der Aufgabenstellung wird nach den Stoffeigenschaften des umgebenden Fluids gefragt. Nur bei der Randbedingung der dritten Art wird der Wärmeübergang zu einem umgebenden Fluid mit berücksichtigt. Hierbei spielt α eine Rolle denn α ist eine Funktion der Stoffeigenschaften.

Zusammenfassung der Aufgabenstellung:Die in der Aufgabenstellung betrachtete zylinderförmige Wassertonne kann vereinfacht als halbunendlicher Körper angesehen werden. Desweiteren sind für die Berechnung der Aufgabe folgende Werte gegeben:

- Eigenschaften der Kunststofftonne:
  - Höhe der Tonne: $1,2\,m$
  - Innendurchmesser der Tonne: $0,9\,m$
  - Wandstärke der Tonne: $0,002\,m$
  - Wärmeleitfähigkeit: $\lambda_K = 0{,}11\frac{W}{mK}$
  - Dichte: $\rho_K = 14{,}33\frac{Kg}{mK}$
  - spezifische Wärmekapazität: c$_K = 1{,}2\frac{J}{gK}$
- Eigenschaften des Styropors:
  - Wandstärke der Isolierung: $0,03\,m$
  - Wärmeleitfähigkeit der Isolierung: $\lambda_S = 0{,}11\frac{W}{mK}$
  - Wärmeübergangskoeffizient Styropor/Luft: $\alpha_{ges} = 35{,}00\frac{W}{m^2K}$
- Temperaturen:
  - Temperatur der Tonne, der Isolierung und der Umgbung: $_u = 20{,}0C$
  - Temperatur des kochenden Wassers: $_w = 100{,}0C$

Aufgabenteil a)

Mit der DGL für den halbunendlichen Körper(Achtung: ebene Platte):

$$\frac{T(x,t)-T_0}{T_s-T_0} = erfc\frac{x}{\sqrt{4at}}$$

Und den in der Aufgabenstellung gegebenen Temperaturen:

$T_0 = 20°C = Anfangstemperatur$

$T_s = 100°C = aufgeprägteTemperatur$

T(x,t)=20,01°C = maximale Temperatur an der Stelle x

Ergibt sich:

$$\frac{20{,}01°C-20°C}{100°C-20°C} = erfc\frac{x}{\sqrt{4at}}=0{,}000125$$

Mit diesem Wert für erfc und der Vereinfachung:

$$z = \frac{x}{\sqrt{4at}}$$

Kann nun in der Tabelle interpoliert werden:

$$\frac{(0{,}000134-0{,}000075)}{(2{,}7-2{,}8)} = \frac{(0{,}000134-0{,}000125)}{(2{,}7-z)}$$

$$\frac{(0{,}000134-0{,}000075)\cdot(2{,}7-2{,}8)}{(0{,}000134-0{,}000125)}=(2{,}7\text{-z})$$

$$2{,}7\text{-}\frac{(0{,}000134-0{,}000075)\cdot(2{,}7-2{,}8)}{(0{,}000134-0{,}000125)}= \text{z} =2{,}7153$$

Um die in der Aufgabenstellung geforderte Zeit zu berechnen stellt man die Vereinfachung für z nun nach t um.

$$z = \frac{x}{\sqrt{4at}} \Rightarrow t = \frac{(\frac{x}{z})^2}{4a}$$

Um die Gleichung zu Lösen wird nun noch a benötigt welches sich aus dem Zusammenhang

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

$$a = \frac{0{,}11\frac{W}{mK}}{1200{,}0\frac{Kg}{m^3}1200{,}0\frac{J}{KgK}}$$

$$a = 7,63889 \cdot 10^-8\frac{m^2}{s}$$

Nach einsetzen ergibt sich:

t= 1,776 s

Aufgabenteil b)

Für den kA-Wert eines Zylinders gilt die Gleichung:

$$(\frac{1}{kA})_{Zylinder} = \mathrm{R}_1 + R_2 + \frac{1}{2\pi r_a L\alpha}$$

Für den Wiederstand des Kunstoffzylinders gilt:

$$\mathrm{R}_1 = \frac{ln\frac{r_*}{r_i}}{2\pi\lambda_K L} = \frac{ln(\frac{0,452}{0,45})}{2\pi 0,11\frac{W}{mK}1,2m} = 5,3469 \cdot 10^-3\frac{K}{W}$$

Für den Wiederstand des Styroporzylinders gilt:

$$\mathrm{R}_2 = \frac{ln\frac{r_a}{r_*}}{2\pi\lambda_S L} = \frac{ln(\frac{0,482}{0,452})}{2\pi 0,04\frac{W}{mK}1,2m} = 0,2131\frac{K}{W}$$

Mit $\alpha_{ges} = 35{,}00\frac{W}{m^2K}$ ergibt sich für

$$\frac{1}{2\pi r_a L\alpha} = 7.8618 \cdot 10^-3\frac{K}{W}$$

Und somit für den kA-Wert:

$$\mathrm{kA} = 4{,}41\frac{W}{K}$$

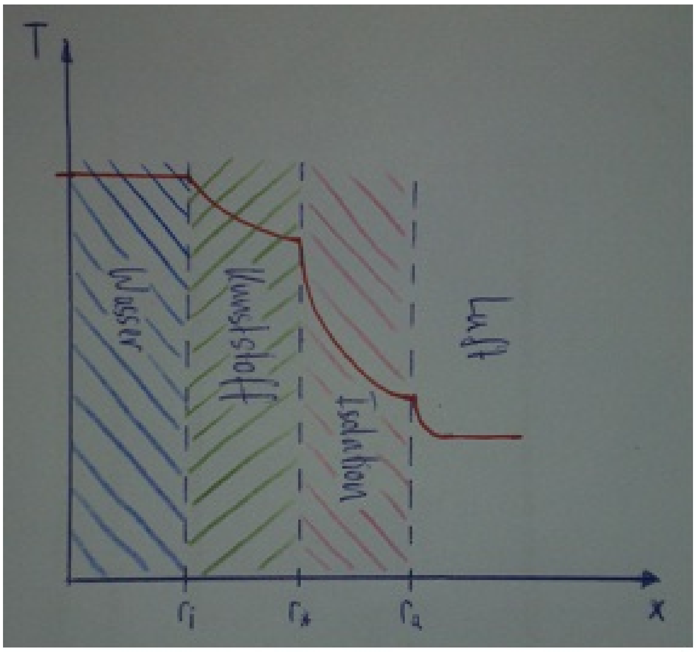
Aufgabenteil c)

$$\dot{Q} = kA \cdot (T_\infty - T_T)$$

$$\dot{Q} = 4,41\frac{W}{K} \cdot (20°C - 100°C)$$

$$\dot{Q} = -352,8W$$

Aufgabenteil d)



Aufgabe 3: *Heizkörper in einem Raum* 19 von 50 Punkten

Kurzfrage: Die Univerwaltung nennt in einem Rundschreiben zum Thema „Heizkosten sparen“ eine Faustformel, nach der eine Erhöhung der Bürotemperatur um 1°C zu einem Mehrverbrauch von 5% führt. Für welche beispielhafte Kombination von Außen- und Bürotemperatur stimmt diese Beziehung genau. (Unter Vernachlässigung des Strahlungswärmeaustauschs)

Antwort: Die genannte Beziehung stimmt für einen Zustand mit ΔT= 20°C

Zusammenfassung der Aufgabe:

$\dot{m}_{Wasser}$=1,5 $\frac{kg}{min}$ = 0,025 $\frac{kg}{s}$

$T_{Ein} = 60°C$

$T_{Luft} = 20°C$

$\Delta T_m = 25K$

$kA_{Heizkörper=35\frac{W}{K}}$

$A_{Heizkörper=5m^2}$

Aufgabenteil a)

Mit der Gleichung für den von einem Wärmeübertrager(ohne Phasenwechsel) übertragenen Wärmestrom in der Form mit kA und $\Delta T_m = 25K$:

$$\dot{Q} = kA \cdot \Delta T_m = 875 \text{ W}$$

und mit der Gleichung für den von einem Wärmeübertrager(ohne Phasenwechsel) übertragenen Wärmestrom in der Form des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik:

$$\dot{Q} = \dot{m}_{Wasser} \cdot c_p \cdot (T_{Ein} - T_{Aus}) = 875 \text{ W}$$

Ergibt sich für die Austrittstemperatur:

$$T_{Aus} = 51{,}6268°\text{C}$$

Aufgabenteil b)

Mit der Gleichung für ϵ_2:

$$\epsilon_2 = \frac{T_{Ein} - T_{Aus}}{T_{Ein} - T_{Luft(Ein)}}$$

ergibt sich für die dimensionslose Temperaturänderung:

$$\epsilon_2 = 0{,}20933014$$

Aufgabenteil c)

Der Wärmeübergang wird nicht wie die Annahme impliziert durch die Wandung des Heizkörpers begrenzt sondern durch den Übergang Heizkörperwand/Luft.

Ab hier gilt:

$T_{Heizkörperoberfläche} = 55°C$

$A_{Decke} = A_{Boden} = 16 m^2$

$H_{Raum} = 2{,}2$ m

$A_{Raum} = 67{,}2\ m^2$

$A_{Heizkörper} = 5 m^2$

Aufgabenteil d)

Mit den Relationen für die Sichtfaktoren(Reziprozitätsbeziehung und Summenbeziehung) ergibt sich:

$$F_{H,H} = 0{,}5$$

$$F_{H,R} = 1 - F_{H,H} = 0{,}5$$

$F_{R,H} = F_{H,R} \cdot \frac{A_{Heizkörper}}{A_{Raum}} = 0,03720238$

$$F_{R,R} = 1 - F_{R,H} = 0{,}96279762$$

Aufgabenteil e)

Der vom Heizkörper an den Raum abgegebene Strahlungswärmestrom ergibt sich durch die beiden isothermen Flächen zu:

$$\dot{Q}_{HR}= \frac{\sigma\cdot(T_1^4-T_2^4)}{\frac{1-\epsilon_H}{A_H\cdot\epsilon_H}+\frac{1}{A_H\cdot F_{H,R}}+\frac{1-\epsilon_R}{A_R\cdot\epsilon_R}}$$

Mit $\epsilon_H = 1$ vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\dot{Q}_{HR}= \frac{\sigma\cdot(T_1^4-T_2^4)}{\frac{1}{A_H\cdot F_{H,R}}+\frac{1-\epsilon_R}{A_R\cdot\epsilon_R}}$$

Beim Einsetzen der Werte darauf achten, dass T[K] benutzt wird!

Dann ergibt sich für $\dot{Q}_{HR}$:

$$\dot{Q}_{HR}\text{=636,385435W}$$

Aufgabenteil f)

Die in der Aufgabenstellung geforderte mittlere Bestrahlungsstärke E_W von Wänden, Decke und Boden ergibt sich aus dem Anteil der vom Heizkörper ausgeht, dem der von den Wänden ausgeht und dem der von den Wänden auf die Wände reflektiert wird. Es gilt also:

$$E_W=E_{RR}+E_{HR}+\rho\cdot \mathrm{E}_W\ \cdot\mathrm{F}_{RR}$$

$$\rho=\text{ 1-}\epsilon$$

$$E_{RR}= \sigma\cdot\mathrm{A}_R\ \cdot\mathrm{T}_R{}^4\cdot\epsilon_W\ \cdot\mathrm{F}_{RR} \text{ und } E_{HR}= \sigma\cdot\mathrm{A}_H\ \cdot\mathrm{T}_H{}^4\cdot\epsilon_H\ \cdot\mathrm{F}_{HR}$$

$$E_W\text{ - }\rho\cdot\mathrm{E}_W\ \cdot\mathrm{F}_{RR}=E_{RR}+E_{HR}$$

$$E_W\ \cdot(1-\rho\cdot\mathrm{F}_{RR})=E_{RR}+E_{HR}$$

$$E_W\ =\frac{E_{RR}+E_{HR}}{(1-\rho\cdot F_{RR})}$$

$$E_W\ = \text{27707,6898 W}$$