

Klausur zur Vorlesung Wärme- und Stoffübertragung

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- und Gedankengang muss erkennbar sein! Interpolationsvorschriften sind anzugeben. Quadratische Gleichungen sind analytisch zu lösen. Hilfsmittel sind zugelassen, Verwenden Sie, sofern benötigt, die Gröberdiagramme aus dem Skript. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

Aufgabe 1: *Erwärmung eines Stahlzylinders*

14 von 50 Punkten

Kurzfrage: Welche in der Vorlesung vorgestellte Randbedingung beschreibt die folgende Situation am besten? Ein Rinderbraten, der Küchentemperatur hat, wird in einen Ofen geschoben, der auf 180°C vorgeheizt ist.

Ein Stahlzylinder mit einem Durchmesser von 3 cm und einer Länge von 5 m ist an der Mantelfläche (M) sowie an einer Stirnfläche (S1) thermisch perfekt isoliert und hat zu Beginn der Betrachtung überall eine Temperatur von 20°C . Der anderen Stirnfläche (S2) wird zum Zeitpunkt t_0 eine Temperatur von 500°C aufgeprägt.

Folgende Werte sind bekannt:

λ_{Stahl}	$c_{p,\text{Stahl}}$	ρ_{Stahl}	λ_{Luft}	ρ_{Luft}
$20 \frac{\text{W}}{\text{K m}}$	$0,47 \frac{\text{J}}{\text{g K}}$	$7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$0,026 \frac{\text{W}}{\text{K m}}$	$1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

- a) Welchen Wert muss der Wärmeübergangskoeffizient α zwischen der Stirnfläche S2 und ihrer Umgebung haben, damit man davon sprechen kann, dass der Stirnfläche eine Temperatur *aufgeprägt* wird? (Hinweis: Sollten Sie in einer folgenden Aufgabe in einem Diagramm Probleme mit diesem Wert haben, verwenden Sie $\alpha = 200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$)
- b) Zeichnen Sie zu vier Zeitpunkten ($t = t_0 - 1\text{ sec}$, $t = t_0 + 20\text{ sec}$, $t = t_0 + 2\text{ min}$ und $t = t_0 + 5\text{ h}$) ein qualitatives Temperaturprofil des Stahlzylinders.
- c) Wie lange dauert es, bis sich die Temperatur im Stahlzylinder 1 cm von der Stirnfläche S2 entfernt auf 22°C erhöht hat?
- d) Wie lange dauert es, bis sich die Temperatur der Stirnfläche S1 auf 404°C erhöht hat?
- e) Wie lange dauert es, bis sich die Temperatur im Stahlzylinder 1 m von der Stirnfläche S2 entfernt auf 468°C erhöht hat?
- f) Wie lange dauert es, bis sich die Temperatur in der Mitte des Stahlzylinders auf genau 500°C erhöht hat?

Lösung Aufgabe 1:

KF: Randbedingung der 3. Art.

a) $\alpha \rightarrow \infty$

b) In einem T,x-Diagramm Potentialfunktionen ausgehend von 500°C .

Es gilt $T = 20^{\circ}\text{C}$ für $t = t_0 - 1\text{sec}$. Für $t = 1$ und die darüber liegende Funktion $t = 5$ enden die Funktionen bei $T = 20^{\circ}\text{C}$, alle weiteren fächern sich nach oben auf.

c)

$$\frac{T_{(x,t)} - T_0}{T_s - T_0} = \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4at}}$$

$$\frac{295 - 293}{773 - 293} = \frac{2}{480} = \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4at}}$$

$$\frac{2}{480} = 0,0041667$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{4at}} = 2,03$$

$$\left(\frac{x}{2,03}\right)^2 = 4at$$

$$x = 0,01$$

$$a = \frac{20}{470 \cdot 7900} = 5,39 \cdot 10^{-6}$$

$$\left(\frac{0,01}{2,03}\right)^2 \cdot \frac{1}{4a} = t = 1,12\text{sec}$$

d)

$$\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha L} \text{ mit } \alpha \rightarrow \infty \quad \frac{1}{Bi} = 0 \quad \frac{T_c - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{404 - 500}{20 - 500} = 0,2$$

$$\Theta = 0,2$$

$$\frac{1}{Bi} = 0$$

Aus Diagramm 4.11:

$$\Rightarrow Fo = 0,8 = \frac{at}{L^2} \Leftrightarrow \frac{0,8 \cdot 25}{5,39 \cdot 10^{-6}} = 3,71 \cdot 10^5 \text{sec} = 1,0307 \cdot 10^3 \text{h} = 42,9 \text{Tage}$$

e)

$$L = 5m, \frac{1}{Bi} = 0$$

Aus Abb 4.12 ergibt sich mit $\frac{x}{\delta} = 0,8$ und da $\frac{1}{Bi} = 0$ nicht ablesbar ist mit:

$$\alpha = 200 \frac{W}{m^2K} \frac{1}{Bi} = 0,02$$

$$\frac{T_c - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0,33 \Rightarrow T_c = 403^\circ C \Rightarrow 42,9Tage$$

f) Ewig.

Kurzfrage: Der Wärmeübergangskoeffizient α beschreibt den Wärmeübergang zwischen einem Festkörper und einem Fluid. In welcher Form fließen die thermophysikalischen Stoffeigenschaften des Festkörpers in die Berechnung von α ein?

Ein freistehendes Laborgebäude ohne Fenster und Türen hat eine Länge von 40 m und eine Breite von 35 m . Es ist 3 m hoch und sowohl Boden als auch Decke sind adiabatisch. Die gemauerten Wände sind 30 cm dick und haben eine Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0,32 \frac{\text{W}}{\text{K m}}$.

An einem Herbsttag weht der Wind mit $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ entlang der langen Seite des Gebäudes. Im Inneren des Labors arbeiten Wissenschaftler, die konstant einen Wärmestrom von 900 W abgeben. Weiterhin ist im Inneren eine Heizung installiert, die so geregelt wird, dass im Inneren stets 23°C herrschen. Außen liegt eine Temperatur von 9°C vor.

Hinweis: Sie können sowohl innen, als auch außen von einer Länge der Wand von 40 bzw. 35 m ausgehen und müssen nicht die zwei Mal 30 cm Wandstärke berücksichtigen, um die Länge der inneren Wand kleiner sein müsste als die der äußeren Wand.

- Bestimmen Sie den Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_{L,a}$ außen an der Längsseite des Gebäudes. Gehen Sie dabei - sofern benötigt - von einer Außentemperatur der Wand von 11°C aus.
- Bestimmen Sie den Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_{L,i}$ innen an der Längsseite des Gebäudes. Gehen Sie dabei - sofern benötigt - von einer Innentemperatur der Wand von 17°C aus.
- Bestimmen Sie den Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_{K,i}$ innen an der kurzen Seite des Gebäudes. Gehen Sie dabei - sofern benötigt - von einer Innentemperatur der Wand von 17°C aus.

Gehen Sie ab hier von folgenden Werten aus: $\alpha_{L,a} = 15 \frac{\text{W}}{\text{K m}^2}$, $\alpha_{L,i} = 5 \frac{\text{W}}{\text{K m}^2}$ und $\alpha_{K,i} = 5 \frac{\text{W}}{\text{K m}^2}$. Die kurze Seite hat außen auf der dem Wind zugewandten Seite einen anderen Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_{K,a,vordereSeite} = 20 \frac{\text{W}}{\text{K m}^2}$ als auf der dem Wind abgewandten Seite $\alpha_{K,a,Windschatten} = 10 \frac{\text{W}}{\text{K m}^2}$.

- Welche Leistung hat die Heizung?

Um Heizkosten zu senken, soll das Labor mit Styroporplatten isoliert werden.

- Spielt es für den kA-Wert des gesamten Gebäudes eine Rolle, ob das Styropor außen oder innen angebracht wird? Wo würden Sie die Isolierung anbringen?
- Steigt oder sinkt die Temperatur $t_{L,a}$, an der Kontaktstelle zwischen Außenluft und der Wand (bzw. dem Styropor) aufgrund der Isolierung?

Lösung Aufgabe 2:

KF: Überhaupt nicht. Nur die Geometrie des Körpers fließt mit ein.

a) An einer ebenen Platte erzwungene Konvektion:

$$Nu = Nu_{\text{ruhend}} + \sqrt{Nu_{\text{lam}}^2 + Nu_{\text{turb}}^2}$$
$$Nu_{\text{ruhend}} = 0$$

$$Pr_{\text{Luft}}(10^\circ\text{C}) = 0,716350$$

$$v_{\text{Luft}}(10^\circ\text{C}) = 144,35 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\lambda_{\text{Luft}}(10^\circ\text{C}) = 24,935 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

$$Re = \frac{\omega l}{v} = \frac{40 \cdot 10}{144,35 \cdot 10^{-7}} = 2,77 \cdot 10^7$$

$$\Rightarrow Nu = 2,63 \cdot 10^4 \Rightarrow \alpha_{L,a} = 16,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

b) freie Konvektion an einer vertikalen Platte

$$Ra = Gr \cdot Pr$$

$$Pr_{\text{Luft}}(20^\circ\text{C}) = 0,7148$$

$$v_{\text{Luft}}(20^\circ\text{C}) = 153,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\lambda_{\text{Luft}}(20^\circ\text{C}) = 25,69 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

$$\beta_{\text{Luft}}(23^\circ\text{C}) = 3,388 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$$

$$Gr = 2,28 \cdot 10^{10}$$

$$Ra = 1,633 \cdot 10^{10}$$

$$f_1 = 0,3481$$

$$\Rightarrow Nu = 295 \Rightarrow \alpha_{L,i} = 2,53 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

c) Es ergeben sich, aufgrund von gleicher Geometrie, die gleichen Werte damit ist ebenfalls

$$\alpha_{K,i} = 2,53 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}.$$

d)

$$\dot{Q} = kA \cdot \Delta T$$

$$\frac{1}{kA} = \frac{1}{A\alpha_a} + \frac{1}{A\alpha_i} + \frac{\delta}{A\lambda}$$

$$A_l = 3\text{m} \cdot 40\text{m}$$

$$A_h = 3\text{m} \cdot 35\text{m}$$

$$kA_l = 199,3 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

$$kA_{k,\text{vorne}} = 88,4 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

$$kA_{k,\text{hinten}} = 84,8 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

$$kA_{\text{Total}} = 372,6 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = kA \cdot \Delta T = 5216,1\text{W} - 900\text{W} = 4316,1\text{W}$$

e) Für den kA - Wert spielt es keine Rolle auf welcher Seite man die Styroporplatten anbringt. Aufgrund von Kondensat, dass sich zwischen Styropor und Innenwand bilden kann, sollte man die Platten dennoch besser auf der Außenseite anbringen, um das Entstehen von Schimmel zu vermeiden.

f) \dot{q} sinkt. ΔT sinkt $\Rightarrow t_{L,a}$ sinkt

Kurzfrage: Stellen Sie sich ein Sonnensystem mit vier Körpern, einem Zentralgestirn (Z) und drei Planeten ($P_1 - P_3$), vor. Die Sichtfaktoren F_{Z,P_1} und F_{Z,P_2} sind ebenso wie die Oberflächen der Planeten bekannt. Können Sie aus diesen Angaben auf die Sichtfaktoren F_{Z,P_3} und $F_{P_1,Z}$ schließen? Wenn ja - nennen Sie die zu verwendenden Beziehungen.

Der Abstand der Erde zur Sonne beträgt 149,6 Millionen Kilometer. Die Sonne und die Erde haben jeweils etwa die Form einer Kugel mit den Durchmessern $D_S = 1,39$ Millionen Kilometer und $D_E = 12.750 \text{ km}$. Es soll weiterhin davon ausgegangen werden, dass die Erde sich auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegt und beide Körper (Sonne und Erde) sich wie schwarze Strahler verhalten ($T_{\text{Sonne}} = 5750 \text{ K}$). Das All soll ebenfalls als schwarzer Strahler ($T_{\text{All}} = 0 \text{ K}$) betrachtet werden. Der Einfluss aller weiteren Planeten oder Sterne kann vernachlässigt werden. Weiterhin soll gelten, dass die Erde sich rasch genug dreht, so dass sich eine gleichmäßige Oberflächentemperatur einstellen kann, und dass zwischen Weltraum und Planetenoberfläche der Strahlungsaustausch ungehindert möglich ist.

- a) Welche Strahlungsleistung Φ_S wird von der Sonne abgestrahlt?
- b) Welche Strahlungsleistung Φ_E der Sonne wird von der Erde empfangen?

Gehen Sie ab hier von $\Phi_E = 174 \text{ PW} = 1,74 \cdot 10^{17} \text{ W}$ aus.

- c) Bestimmen Sie zunächst den Wärmestrom der von der Erde in Abhängigkeit von Ihrer Oberflächentemperatur an das All abgegeben wird. Bestimmen Sie dann die Erdoberflächentemperatur t_E .

Gehen Sie ab hier von einer theoretisch ermittelten Erdoberflächentemperatur $t_E = 5^\circ\text{C}$ aus.

- d) Bei welcher Wellenlänge läge unter diesen Bedingungen das Maximum der von der Erde abgegebenen Strahlung?
- e) Aus welchen Gründen liegt die mittlere tatsächliche Temperatur der Erdoberfläche (15°C) höher als die mit diesem Modell berechnete?
- f) Spielt für den Strahlungsaustausch zwischen Erde und All die getroffene Annahme, dass das All ein schwarzer Strahler sei, eine Rolle? Begründung!

Lösung Aufgabe 3:

KF: F_{Z,P_3} lässt sich nicht erschließen. $F_{P_1,Z}$: Reziprozitätsbeziehung.

a)

$$r = \frac{13900000000 \text{ km}}{2} = 6950000000 \text{ km}$$

$$O_{\text{Sonne}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 6,066 \cdot 10^{18} \text{ km}^2$$

$$T_{\text{Sonne}} = 5750 \text{ K}$$

$$\Phi_S = O_{\text{Sonne}} \cdot T_{\text{Sonne}}^4 \cdot \sigma = 3,76 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

b)

$$a_{\text{Erde} \rightarrow \text{Sonne}} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ km}$$

$$O_{\text{Kugel}} = 4 \cdot \pi \cdot a_{\text{Erde} \rightarrow \text{Sonne}}^2 = 2,810 \cdot 10^{23} \text{ km}^2$$

$$r_{\text{Erde}} = 6375000 \text{ km}$$

$$\text{Projektion}_{\text{Erdkugel}} = \pi \cdot r_{\text{Erde}}^2 = 1,276 \cdot 10^{14} \text{ km}^2$$

$$\Phi_E = \frac{\Phi_S \cdot \text{Projektion}_{\text{Erdkugel}}}{O_{\text{Kugel}}} = 1,71 \cdot 10^{17} \text{ W}$$

c)

$$O_{\text{Erde}} = 5,1 \cdot 10^{14} \text{ km}^2$$

$$\dot{Q}_{\text{All}} = \dot{Q}_{\text{Empfangen}} = O_{\text{Erde}} \cdot T_{\text{Erde}}^4 \cdot \sigma$$

$$T_e^4 = \frac{\Phi_E}{\sigma \cdot O_{\text{Erde}}} = 6,01 \cdot 10^9 \text{ K}^4$$

$$T_e = 278,45 \text{ K}$$

d)

Mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{\text{max}} T = 2897,756$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{max}} = 10,418 \mu\text{m}$$

e) Aufgrund des anthropogenen und des natürlichen Treibhauseffektes.

f) Nein, da $A_{\text{All}} \gg A_{\text{Erde}}$

Aufgabe 4: *Kerze in einer Kneipe*

7 von 50 Punkten

Kurzfrage: In welche Richtung (oben oder unten) diffundiert in einem Brunnenschacht das Wasser? In welche Richtung die Luft? Was für eine Form des Stofftransports überlagert die diffusive Bewegung?

Ein Teelicht befindet sich am Boden eines zylinderförmigen Glases und brennt. Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass die Flamme der Kerze sich auf der Höhe des Bodens befindet. Das Teelicht benötigt zum Brennen eine Sauerstoffzufuhr von $6 \cdot 10^{-5} \text{ mol/s}$ und einen Sauerstoffpartialdruck von mindestens $0,15 \text{ bar}$ (In der Umgebungsluft herrscht ein Sauerstoffpartialdruck von $0,2 \text{ bar}$). Beim Brennen wird Sauerstoff (O_2) verbraucht und es entsteht die gleiche Molmenge CO_2 .

Das Teelicht steht in einer Kneipe in Braunschweig an einem Winterabend mit $19^\circ C$, die nicht nur in der Kneipe, sondern auch in dem Glas mit der Kerze herrschen sollen.

Der für die Diffusion des Sauerstoffs von der Glasoberkante zur Kerze relevante Diffusionskoeffizient D beträgt $2,2 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$

- a) Handelt es sich bei dem oben beschriebenen Vorgang um äquimolare Diffusion?
- b) Welches Mindestverhältnis von Stirnfläche des Glases (also der Öffnung) zu seiner Höhe muss gewährleistet werden, damit die Kerze dauerhaft brennen kann?
- c) Wie groß ist der Molanteil des CO_2 mindestens, wenn die Kerze aufgrund von Sauerstoffmangel erlischt?
- d) Könnte eine Kerze, die nur einen infinitesimal kleinen Mindestsauerstoffpartialdruck aber die oben genannte Sauerstoffzufuhr zum Brennen benötigt, in einem beliebig hohen Glas (bei gegebenem Durchmesser) dauerhaft brennen?
- e) Könnte eine Kerze, die mit nur infinitesimal kleiner Sauerstoffzufuhr auskommt aber den oben genannten Mindestsauerstoffpartialdruck zum Brennen benötigt, in einem beliebig hohen Glas (bei gegebenem Durchmesser) dauerhaft brennen?

Lösung Aufgabe 4:

KF: Wasser verdunstet und wird durch Diffusion nach oben transportiert, Luft will nach unten diffundieren kann aber nicht, da die Wasseroberfläche eine Sperrschicht für die Luft darstellt. Die Konvektion.

a) Da pro Mol O_2 ein Mol CO_2 entsteht, handelt es sich um äquimolare Diffusion.

$$b) \frac{A}{h} = \frac{j_{O_2} \cdot R \cdot T}{D \cdot (p_o - p_u)} = 1,34$$

$$c) p_{min,CO_2} = 0,05 \text{ bar} \\ \Rightarrow O_{2,start} - O_{2,erloschen} = 0,05 \text{ bar}$$

d) Nein, die Kerze würde erlöschen.

e) Ja, Kerze würde immer brennen.