Institut für Thermodynamik
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

11. August 2010

Klausur zur Vorlesung

Wärme- und Stoffübertragung

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- und Gedankengang muss erkennbar sein!
Interpolationsvorschriften und Stützstellen sind anzugeben.
Hilfsmittel sind zugelassen, Verwenden Sie, sofern benötigt, die Gröberdiagramme aus dem Skript. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

Aufgabe 1: *Strahlung* 14 von 50 Punkten

Kurzfrage: Welches grundsätzliche mathematische Vorgehen muss gewählt werden, um aus einer gegebenen gerichteten, spektralen Ausstrahlung auf eine hemisphärische spektrale Ausstrahlung zu schließen?

Eine Kugel mit einem Durchmesser von $10\,cm$ liegt auf einer im Verhältnis zu den Abmaßen der Kugel sehr großen, ebenen Glasplatte. Die im relevanten Wellenlängenbereich opake Glasplatte hat einen Reflektionsgrad von 0,2. Die Kugel ist ein schwarzer Strahler.

Die Kugel hat eine homogene Temperatur von $180°C$ und gibt einen Strahlungswärmestrom von $40\,W$ an die Platte ab, die ebenfalls eine homogene Temperaturverteilung aufweist.

a) Gegen welchen Wert geht der Sichtfaktor F_{KP} von der Kugel auf die Platte? Gegen welchen Wert geht der Sichtfaktor F_{PK} von der Platte auf die Kugel? (Falls Sie die Ergebnisse nicht durch eine Rechnung ermitteln, begründen Sie Ihre Antwort knapp in Worten und ggf. mit einer Skizze.)

b) Wie groß sind die Emissionskoeffizienten von Kugel und Platte?

c) Welche Temperatur hat die Platte? Rechnen Sie dabei so, als ob keine Wechselwirkung mit anderen strahlenden Flächen (abgesehen von Kugel und Platte) aufträte.

d) Wie groß ist die totale, hemisphärische Ausstrahlung der Kugel?

e) Ist die spektrale, hemisphärische Ausstrahlung der Kugel bei $6{,}2\,\mu m$ oder bei $6{,}3\,\mu m$ größer? Denken Sie daran, Ihre Antwort zu begründen!

Lösung zu Aufgabe 1:

KF: Es muss eine Integration über den gesamten Halbraum durchgeführt werden.

a) Alle Strahlen, die nach oben gehen, treffen nie auf die Platte. Alle Strahlen, die nach unten gehen, treffen bei einer sehr großen Platte irgendwann auf die Platte. Der Sichtfaktor ist also 0,5.

b) Die Kugel ist lt. Aufgabe ein schwarzer Strahler, d.h., der Emissionskoeffizient ist 1. Die Platte lässt keine Strahlung durch (opak) und reflektiert 0,2. Also absorbiert sie einen Anteil von 0,8. Emissionskoeffizient = Absorptionskoeffizient = 0,8.

c) Es kann Gleichung 10.29 verwendet werden. Von den drei Summanden im Nenner wird der erste zu Null, da $\epsilon_1 = 1$. Der dritte Summand geht ebenfalls gegen Null, da $A_2 \gg A_1$. Genau genommen geht er nicht gegen Null wird aber irrelevant klein gegenüber dem mittleren Summanden. Daraus ergibt sich mit $A_1 = 0,0314\,m^2$ eine Plattentemperatur von 374,7K.

d) Mit Hilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes ergibt sich $M = 75,1\,W$

e) Das Wiensche Verschiebungsgesetz liefert für einen Körper mit einer Temperatur von 180°C = 453,15K eine maximale Abstrahlung bei $6,39\mu m$. $6,3\mu m$ liegt damit definitiv näher am Maximum als $6,2\mu m$ und hat somit eine höherer Ausstrahlung.

Aufgabe 2: *Beheizter Würfel* 16 von 50 Punkten

Kurzfrage: Welche Geschwindigkeit ist im Bereich des Blasensiedens die charakteristische Geschwindigkeit, die z.B. zur Bildung einer Re-Zahl verwendet werden kann.

Ein Würfel mit einer Oberfläche von $24\,cm^2$ hängt an einem dünnen Draht in ruhender Luft, die eine Temperatur von $50°C$ besitzt. Durch den Draht wird der Würfel mit elektrischem Strom versorgt, so dass der Würfel von innen beheizt werden kann. Der Würfel ist aus Silber und soll aufgrund der guten thermischen Leitfähigkeit von Silber stets eine einheitliche Temperatur haben.

Wärmeübertragung durch Strahlung soll zur Vereinfachung der Aufgabe vollständig vernachlässigt werden.

Hinweis: Sie finden Stoffdaten zu Silber im Anhang des Skripts.

a) Zunächst wird dem Würfel über lange Zeit eine elektrische Leistung von $1{,}75\,W$ zugeführt. Welche Temperatur stellt sich im Würfel ein? (Gehen Sie zunächst von einem Schätzwert der Würfeltemperatur von 90°C aus, um evtl. erforderliche Stoffwerte bestimmen zu können)

b) Dann wird die elektrische Leistung auf $1\,W$ gesenkt. Auf welche Temperatur sinkt der Würfel nach langer Zeit? (Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Würfel und Luft den gleich Wert wie unter a) annimmt)

c) Im vorherigen Aufgabenteil ist vereinfachend davon ausgegangen worden, dass der Wärmeübergangskoeffizient konstant bleibt. Wird der tatsächliche Wärmeübergangskoeffizient durch diese Vereinfachung unter- oder überschätzt?

d) Auf welche Temperatur ist der Würfel 5 Minuten nach der Reduktion der elektrischen Leistung von $1{,}75\,W$ auf $1\,W$ gesunken? (Gehen Sie bei diesem Aufgabenteil von einem Wärmeübergangskoeffizienten von $\alpha = 17\,\frac{W}{K\,m}$ aus.)

Lösung Aufgabe 2

KF: Nach einem Vorschlag von Rosenow handelt es sich um die scheinbare Geschwindigkeit, mit der sich die Flüssigkeit auf die Verdampferoberfläche zu bewegt. Sie berechnet sich als

$w = \frac{\dot{q}}{\rho_f \Delta h_v}$

a) Stationärer Zustand: $\dot{W}_{el} = \dot{Q}_{ab} = 1{,}75W = \alpha A \Delta T$, mit $\Delta T = T_W - T_U$

$A = 24\,cm^2$, α kann ermittelt werden, T_U ist bekannt. Somit lässt sich T_W bestimmen.

Ermittlung von α: Im Anhang des Skriptes findet sich eine Nusselt-Beziehung für Würfel:

$Nu = 5,748 + 0,752 \left(\frac{Ra}{f_4}\right)^{0,252}$ mit $f_4 = \left[1 - \left(\frac{0{,}492}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{16}{9}}$ und $l_{char} = \frac{Wuerfeloberflaeche^2}{4 \cdot Wuerfelvolumen}$

Aus der bekannten Würfeloberfläche ergibt sich eine Kantenlänge von 2cm und eine charakteristische Länge von 18cm.

Die Stoffwerte sind bei (50+90)/2 = 70°C zu ermitteln. Lediglich der thermische Ausdehnungskoeffizient wird bei $T_U = 50°C = 323,15\,K$ ermittelt.

$\beta = 1/323,15K = 0,00309\ 1/K$, $\nu = 0,00002033\,m^2/s$ und $\lambda = 0,0300\,W/Km$

$f_4 = 0,05017$, $Gr = 17138563$, $Pr = 0,709$, $Ra = 12151241$

$Nu = 103,25$ und damit $\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{l_{char}} = 17,23\,\frac{W}{Km^2}$

Somit ergibt sich $T_W = 92,3\,°C$

b) Es gilt weiterhin $\dot{W}_{el} = \dot{Q}_{ab} = \alpha A(T_W - T_U)$. Diesmal ist $\dot{W}_{el} = 1\,W$. Somit ergibt sich eine niedrigere Temperatur für den Würfel: 74,2 °C

c) Die Temperaturdifferenz zwischen Würfel und Umgebung hat einen deutlichen (linearen) Einfluss auf die Gr-Zahl. Wird ΔT kleiner, so sinkt auch die Gr-Zahl und damit auch die Ra-Zahl und letztendlich die Nu-Zahl. Bei einer kleineren elektrischen Leistung und damit bei einem kleineren zu erwartenden ΔT ergäbe sich also ein kleinerer Wärmeübergangskoeffizient. Die Vereinfachung, α gleich zu belassen, führt also zu einer Überschätzung.

d) Der Abkühlprozess wird durch folgende DGL beschrieben:

$\frac{dU}{dt} = 1W - \alpha \cdot A(T_W - T_U) \Leftrightarrow \frac{c_{Silber} dT_W}{dt} = 1W - \alpha \cdot A(T_W - T_U)$

$\Leftrightarrow \frac{c_{silber}}{1W - \alpha A(T_W - T_U)} dT_W = dt$, mit $c_{Silber} = 235\,\frac{J}{kgK}$ und $A = 24\,cm^2$

Da das Lösen dieser DGL zwar möglich aber recht kompliziert ist, hätte es bereits für das Aufstellen der DGL und das Heraussuchen der Wärmekapazität von Silber die Punkte für diesen Aufgabenteil gegeben.

Aufgabe 3: *Bank im Regen* 20 von 50 Punkten

Kurzfrage: Formulieren Sie möglichst allgemein, wie lange man einen Körper als 'halbunendlichen' Körper behandeln darf, um eindimensionale instationäre Wärmeleitprobleme zu lösen.

Nach einem plötzlichen und heftigen Regenfall im Hochsommer in Braunschweig ist die Oberfläche einer Holzbank mit einem dünnen Wasserfilm bedeckt. Die Bank soll vereinfacht als glatte Platte mit den Abmaßen $0{,}5\,m$ mal $2{,}5\,m$ angenommen werden. Wind ($2{,}9\,\frac{m}{s}$) weht entlang der kürzeren Seite. Die Bank ist $4\,cm$ dick. Zu Beginn der Betrachtung hat die Bank, ebenso wie die umgebende Luft, eine einheitliche Temperatur von 30°C. Es wird also davon ausgegangen, dass der kurze Regenfall die Bank nicht abgekühlt hat.

Für den oben beschrieben Fall gilt eine Lewis-Zahl von $Le = 0{,}9$.
Folgende Stoffwerte stehen Ihnen für das Problem zur Verfügung:

	λ	ν	a
Luft	$26{,}4 \cdot 10^{-3}\,\frac{W}{K\,m}$	$163{,}1 \cdot 10^{-7}\,\frac{m^2}{s}$	$22{,}86 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}$
Wasser (flüssig)	$615 \cdot 10^{-3}\,\frac{W}{K\,m}$	$8{,}010 \cdot 10^{-7}\,\frac{m^2}{s}$	$0{,}148 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}$
Holz	$111 \cdot 10^{-3}\,\frac{W}{K\,m}$	–	$0{,}130 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}$

Weiterhin bekannt sind folgende Daten:
Partialdruck des Wasserdampfs in der Luft: $0{,}03\,bar$
Sättigungspartialdruck Wasserdampf bei 30°C: $0{,}0424\,bar$
Molmassen: $M_{H_2} = 2\,\frac{g}{mol}$ und $M_{O_2} = 32\,\frac{g}{mol}$

a) Welcher Massenstrom verdunstet an der Oberfläche (nur obere Seite) der Bank? (Hinweis: Verwenden Sie zur Vereinfachung nur den laminaren Anteil der relevanten Sherwood Beziehung.)

b) Würde sich der berechnete Massenstrom sowohl bei einer breiteren als auch bei einer längeren Bank ändern? Wie würden Sie in diesen beiden Fällen vorgehen, um den jeweiligen Massenstrom zu bestimmen?

Gehen Sie ab hier von einem verdunstenden Massenstrom von $0{,}18\,\frac{g}{s}$ aus.

c) Welcher Wärmestrom wird der Bank und der Umgebung durch die oben bestimmte Verdunstung entzogen?

d) Führt dieser konstante Wärmestrom dazu, dass die Temperatur der Bank so lange konstant sinkt, bis alles Wasser verdunstet ist? Denken Sie daran, Ihre Antwort zu begründen.

Ab hier soll davon ausgegangen werden, dass bereits der heftige Regen die Bank abkühlt.

e) Gehen Sie davon aus, dass der kalte Regen die Oberfläche der Bank schlagartig auf 20°C abkühlt. Wie lange dauert es unter diesen Umständen nach dem Beginn des Regens bis ein Punkt $2\,mm$ unter der Oberfläche auf 29,5°C abgekühlt ist?

KF: Ein Körper darf so lange als ein halbunendlicher Körper betrachtet werden, bis der Punkt, der sich als letztes in seiner Temperatur ändern wird, sich in einem für das Problem wesentlichen Maße in seiner Temperatur geändert hat.

a)Zur Bestimmung des Massenstroms muss zunächst der Stoffübergangskoeffizient βberechnet werden:

Dem Anhang lässt sich die folgende Nusselt- bzw. Sherwood-Beziehung für den laminaren Anteil entnehmen:

$Sh = 0,664 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}$

Mit der gegeben Viskosität von Luft, einer charakteristischen Länge von $l_{char} = 0{,}5\,m$ und einer Geschwindigkeit von 2,9 m/s ergibt sich eine Re-Zahl von 88900.

Mit der gegeben Lewis-Zahl $Le = Sc/Pr = a/D = 0,8$ und der gegebenen Temperaturleitfähigkeit a der Luft lässt sich der Diffusionskoeffizient der Luft zu $D = 0,0000254\,m^2/s$ bestimmen. Damit ergibt sich für die Luft $Sc = \nu/D = 0,642$.

Mit nun bekannter Sc- und Re-Zahl kann die Sh-Zahl bestimmt werden: $Sh = 171$. Daraus ergibt $\beta = \frac{Sh \cdot D}{l_{char}} = 0,00868\,\frac{m}{s}$.

Da der dünne Flüssigkeitsfilm sehr schnell mit Luft gesättigt ist, liegt ein einseitig behinderter Stofftransport vor, so dass zunächst β_{eins} aus dem Gesamtdruck $p = 1\,bar$, dem Wasserdampfpartialdruck $p_w = 0,03\,bar$ und dem Sättigungsdruck $p_s = 0,0424\,bar$ bestimmt werden muss:

$\beta_{eins} = 0,00900\,m/s$

Aus dem nun bekannten β_{eins}, der Oberfläche der Oberseite der Bank $A = 1{,}25\,m^2$, der Partialdruckdifferenz $\Delta p = 1240\,pas$, der Universellen Gaskonstante R, der Molmasse für Wasser $M_{H_2O} = 18\,\frac{g}{mol}$ und der mittleren Temperatur $T_m = 303,15\,K$ lässt sich der Massenstrom des verdunstenden Wassers zu:

$\dot{m} = \frac{\beta_{ein} \cdot A \cdot \Delta p \cdot M_{H_2O}}{R \cdot T_m} = 0,0997 g/s$ berechnen

b) Würde die Bank an Ihrer kurzen Seite, die die charakteristische Länge darstellt, verlängert, so müsste die ganze Rechnung erneut durchgeführt werden. Bei einer Verlängerung der anderen Seite stiege der Massenstrom ebenfalls. Allerdings könnte das bereits bestimmte β_{eins} weiter verwendet werden. Lediglich im letzten Rechenschritt müsste mit einer größeren Fläche gerechnet werden.

c) Unter Berücksichtigung der Verdampfungsenthalpie Δh_v bei 30°C ergibt sich $\dot{Q} = 0,00018\,kg/s \cdot 2429,7 kJ/kg = 437\,W$.

d) Nein, die Verdunstung entzieht der Bank Wärme, so dass deren Temperatur sinkt. Die so entstehende Temperaturdifferenz zwischen Bank und Umgebung führt aber zu einer konvektiven Wärmezufuhr. So ergibt sich nach einiger Zeit ein stationärer Zustand.

e) Instationäres Wärmeleitproblem an einer eben Platte, die als halbunendlicher Körper angenommen werden kann:

Aus $T_x = 29{,}5°C$, $T_0 = 30°C$ und $T_s = 20°C$ ergibt sich $0{,}05 = erfc\frac{x}{\sqrt{4at}}$ mit $x = 0,002\,m$, der in der Aufgabe gegeben Temperaturleitfähigkeit a für Holz und der gesuchten Zeit t.

Aus einer Interpolation ergibt sich $erfc(1{,}388) = 0,05$ und damit nach einer Umformung die Zeit $t = 4,00\,s$.