Institut für Thermodynamik
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

14. August 2009

Klausur zur Vorlesung

Wärme- und Stoffübertragung

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- und Gedankengang muss erkennbar sein!
Interpolationsvorschriften und Stützstellen sind anzugeben.
Hilfsmittel sind zugelassen, Verwenden Sie, sofern benötigt, die Gröberdiagramme aus dem Skript. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

Aufgabe 1: *Wärmedämmung* 13 von 50 Punkten

Kurzfrage: Warum werden in sehr gut wärmegedämmten Häusern Fenster mit Dreifachverglasung eingesetzt und nicht statt dessen eine Doppelverglasung genutzt, deren Luftspalt in der Summe so groß ist die wie zwei Luftspalte einer Dreifachverglasung? (Unter der Annahme, dass auch die drei Glasscheiben in der Summe genauso dick sind wie die zwei Glasschreiben bei der Doppelverglasung)

An einem Tag mit leichtem Wind herrscht im Inneren eines Hauses eine Temperatur $t_i = 22°C$. Betrachtet werden soll das Flachdach des Hauses mit einer Länge $l = 8\,m$, einer Breite $b = 4,5\,m$ und einer Dicke $d = 20\,cm$. Die Temperatur an der Deckeninnenseite $t_{D,i}$ beträgt 18°C. Weiterhin ist bekannt, dass der kA-Wert der Decke 55 $\frac{W}{K}$ beträgt und dass der Beton, aus dem die Decke besteht, eine Wärmekapazität von $c_{Beton} = 1000\,\frac{J}{kgK}$ und eine Wärmeleitfähigkeit von $\lambda_{Beton} = 2{,}1\,\frac{W}{Km}$ besitzt.

a) Welchen Wert hat der Wärmeübergangskoeffizient α_i auf der Innenseite der Decke.

Verwenden Sie in den folgenden Aufgabenteilen den Wert $\alpha_i = 2\,\frac{W}{m^2K}$

b) Welchen Wert hat der Wärmeübergangskoeffizient α_a auf der Außenseite der Decke?

c) Welcher Wärmestrom $\dot{Q}_D$ verlässt das Haus durch die Decke und wie hoch ist die Außentemperatur t_a?

d) Ändert sich die Temperatur der Deckeninnenseite $t_{D,i}$ bei gleichbleibenden Temperaturen t_a und t_i wenn der Wind stärker wird? Wenn ja: In welch Richtung?

Lösung: KF: Zahl der Wärmeübergänge wird bei Dreifachverglasung erhöht / in großen Spalten kann die Luft besser zirkulieren (=schlechtere Isolation)
($\sum_{Punkte} = 1$)

a) Freie Konvektion, ebene Platte, Wärmeaufnahme unten

Stoffwerte Luft bei mittlerer Temperatur $20°C$:
$\rho = 1{,}188\,\frac{kg}{m^3}$, $\beta_{22°C} = 3{,}4 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{K}$, $\nu = 1{,}535 \cdot 10^{-5}\,\frac{m^2}{s}$, $Pr = 0,7148$,
$\lambda = 2,57 \cdot 10^{-2}\,\frac{W}{K\,m}$

$L_{char} = 1{,}44\,m$

$f_2 = 0,40458$
$Gr = 1,69 \cdot 10^9$
$Ra = 1,21 \cdot 10^9$
$f_2 \cdot Ra > 7 \cdot 10^4 \Rightarrow Nu = 1,18 \cdot 10^2$
$\alpha = 2,11\,\frac{W}{m^2K}$
($\sum_{Punkte} = 6$)

b)

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d}{\lambda_B} + \frac{1}{\alpha_a}}$$
$$\Rightarrow \alpha_a = \frac{1}{\frac{1}{k} - \frac{1}{\alpha_i} - \frac{d}{\lambda_B}}$$

mit $k = \frac{kA}{A} = 1,528\,\frac{W}{m^2K}$ ergibt sich dann
$\Rightarrow \alpha_a = 16,86\,\frac{W}{m^2K}$
($\sum_{Punkte} = 2,5$)

c)

$$\dot{Q} = \alpha_i A(t_i - t_{D,i}) = 288\,W$$
$$t_a = t_i - \frac{\dot{Q}}{kA} = 16,76°C$$

($\sum_{Punkte} = 2,5$)

d) $t_{D,i}$ sinkt, da kA größer wird und damit auch $\dot{Q}$ größer wird. Also muss das ΔT zwischen t_i und $t_{D,i}$ größer werden.
($\sum_{Punkte} = 1$)

Aufgabe 2: *Strahlung: Gardinen und Linsensuppe* 15 von 50 Punkten

Kurzfrage: Erklären Sie knapp, warum eine dicke Gardine mit folgenden Werten nur schlecht geeignet ist, um an einem hellen Sommertag zu verhindern, dass sich der Raum, in dem sie aufgehängt ist, stark erwärmt. (Werte der Gardine: Absorptionskoeffizient $\alpha = 0{,}9$, Reflektionskoeffizient $\rho = 0{,}09$ und Transmissionskoeffizient $\tau = 0{,}01$.

Eine opake Gardine mit einem Reflektionskoeffizienten $\rho_G = 0{,}4$ hängt vor einer Fensterfront (Die ganze Wand ist ein einziges großes Fenster) eines Raumes mit quadratischer Grundfläche, in dem eine Lufttemperatur von $t_L = 20°C$ herrscht (Dies gilt auch für die Luft zwischen Fenster und Gardine). Auch Boden, Decke und Wände haben eine Temperatur von $t_W = 20°C$. Lediglich das Fensterglas hat eine Temperatur von $t_F = 25°C$. Der konvektive Wärmeübergangskoeffizient zwischen Gardine und Luft sei $\alpha_{konv} = 3\frac{W}{m^2K}$

Die Gardine hängt mit sehr geringem Abstand und völlig glatt (es bilden sich keine Wellen) vor dem Fenster. Das Fenster und die Gardine haben eine Breite von $B = 3\,m$ und eine Höhe von $H = 2{,}5\,m$. Die Gardine hat überall eine einheitliche Temperatur T_G.

Das Fensterglas hat über alle Wellenlängen hinweg einen Absorptionskoeffizienten $\alpha_F = 0,1$ und einen einen Reflektionskoeffizienten von $\rho_F = 0$. Die restlichen Flächen im Raum verhalten sich wie schwarze Strahler.

Im Wesentlichen durch Sonneneinstrahlung wird eine gesamte, spezifische, hemisphärische Bestrahlungsstärke von $E = 700\,\frac{W}{m^2}$ auf der Außenseite des Fensters hervorgerufen.

a) Wie hoch ist die gesamte, spezifische, hemisphärische Bestrahlungsstärke auf der dem Fenster zugewandten Seite der Gardine? (Beachten Sie dabei den solaren und den von der Fensterscheibe hervorgerufenen Bestandteil)

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Gardinentemperatur T_G den Wärmestrom, der von der Gardine an die Rauminnenflächen (alle Wände + Decken + Boden) abgegeben wird.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von der Gardinentemperatur T_G den Wärmestrom, der konvektiv von der Gardine an die Raumluft abgegeben wird.

d) Zeigen Sie, dass sich im stationären Zustand eine Gardinentemperatur $t_G = 31,58°C$ einstellt.

Es folgt ein Aufgabenteil, der keinen Bezug mehr zu der obigen Aufgabe hat:

e) In den Boden einer perfekt zylinderförmigen Koservendose (Durchmesser $D = 12\,cm$, Höhe $H = 14\,cm$) mit Linsensuppe wird $1\,cm$ vom Rand entfernt ein quadratisches Loch mit einer Fläche von $2\,cm^2$ geschnitten, durch das die Suppe aus der Dose gegossen wird. Betrachtet wird die leere, gereinigte Dose mit dem oben genannten Loch. Bestimmen Sie alle 9 Sichtfaktoren zwischen den Flächen „Loch", „Dosenboden minus Loch" und „Restliche Dose" (Es werden stets die nach innen gerichteten Flächen betrachtet)!

Lösung: KF: Aufgrund des hohen alpha erwärmt sich die Gardine schnell und gib Wärme an den Raum, in dem sie hängt, ab. Die Eigenstrahlung der Gardine kann durch das Fenster nicht entweichen.
($\sum_{Punkte} = 1$)

a)

$$E_{Gardine,U} = 700\frac{W}{m^2} \cdot \tau_{Scheibe} = 700\frac{W}{m^2} \cdot 0,9 = 630\frac{W}{m^2}.$$

Zusätzlicher Beitrag durch die Glasscheibe:

$$E_{Gardine,S} = M_{Scheibe} = \epsilon_{Scheibe}\sigma T^4_{Scheibe} = 44{,}8\tfrac{W}{m^2}$$
$$E_{Gardine} = 674{,}8\tfrac{W}{m^2}$$

($\sum_{Punkte} = 3$)

b) $\alpha_{Gardine} = 0,6$

$$\dot{Q}_{Gardine,Raum} = \sigma A_{Gardine}\alpha_{Gardine}(T^4_{Gardine} - T^4_{Raum}) = 2{,}55 \cdot 10^{-7}(T^4_{Gardine} - 293{,}15^4\,K^4)$$

($\sum_{Punkte} = 2,5$)

c)

$$\dot{Q}_{Konv} = \alpha 2A_{Gardine}(T_{Gardine} - T_{Luft})$$

(Gardine ist auf beiden Seiten in Kontakt mit der Raumluft!)

$$\dot{Q}_{Konv} = 3\frac{W}{m^2K}15m^2(T_{Gardine} - 293{,}15\,K) = 45\frac{W}{K}(T_{Gardine} - 293{,}15\,K)$$

($\sum_{Punkte} = 1,5$)

d) Bilanz für die Gardine (stationärer Zustand):
Wärmeaufnahme durch Einstrahlung (Fensterseite): $404{,}9\,\frac{W}{m^2}$
Wärmeabgabe durch Eigenstrahlung (Fensterseite): $-293{,}4\,\frac{W}{m^2}$
Wärmeabgabe an den Raum durch Strahlung: $-42{,}1\,\frac{W}{m^2}$
Konvektive Wärmeabgabe an Raumluft: $-69{,}5\,\frac{W}{m^2}$
Summe der Wärmestromdichten $\approx 0\,\frac{W}{m^2} \Rightarrow$ stationär q.e.d.
($\sum_{Punkte} = 4$)

e) L = Loch, D = restliche Dose, B = Dosenboden minus Loch
Aus einfacher Anschauung ergibt sich:
$F_{L,B} = 0, F_{L,L} = 0, F_{B,L} = 0, F_{B,B} = 0.$
Gemäß der Summenbeziehung folgt daraus:

$F_{L,D} = 1, F_{B,D} = 1$
aus der Reziprozitätsbeziehung folgen:
$F_{D,B} = 0{,}173, F_{D,L} = 0{,}00312$
Gemäß der Summenbeziehung (für D) folgt daraus:
$F_{D,D} = 0,823$
($\sum_{Punkte} = 3$)

Aufgabe 3: *Wärmeleitung und Temperaturänderung* 11 von 50 Punkten

Kurzfrage: Wie verändert sich die Wärmestromdichte bei einer stationären Wärmeleitung von Außenseite eines Rundrohres hin zur Innenseite? Steigt sie, sink sie oder bleibt sie konstant?

Wasser fließt durch einen Ringspalt, der innen isoliert ist, so dass eine Wärmeabgabe nur nach außen erfolgt. Das Rohr, das die äußere Begrenzung des Ringspalts bildet, besteht aus Kupfer mit der Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 360\,\frac{W}{m\,K}$. Der Innendurchmesser des Ringspalts beträgt $4\,cm$, der Außendurchmesser des Ringspalts beträgt $6\,cm$. Die Wandstärke des Außenrohrs beträgt $0{,}5\,cm$.

Das Wasser strömt durch mit einer Geschwindigkeit von $w = 0{,}1\,\frac{m}{s}$ durch den Ringspalt. Die Temperatur T_W des Wassers ist nur von Lauflänge x aber nicht vom Radius abhängig. Das Wasser tritt mit einer Temperatur $t_{W,0} = 65°C$ in den Ringspalt ein.

Das Rohr befindet sich in einem Keller mit einer Temperatur von $T_U = 15°C$. Das Rohr ist insgesamt $10\,m$ lang. Aber nur auf den ersten 5 Metern befindet sich eine Isolierung außen am Rohr. Diese Isolierschicht hat eine Dicke von $1\,cm$ und eine Wärmeleitfähigkeit von $\lambda_I = 0{,}03\,\frac{W}{K\,m}$.

Der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Wasser und Außenrohr beträgt $\alpha_i = 70\,\frac{W}{m^2K}$, derjenigen zwischen Außenrohr bzw. Isolierung und Umgebungsluft beträgt $\alpha_a = 8\,\frac{W}{m^2K}$

a) Berechnen Sie den kA Wert zwischen Wasser und Umgebung für einen Meter Rohr im Bereich mit der Isolierung.

b) Berechnen Sie den kA Wert des gesamten Rohres.

c) Bestimmen Sie den Wärmekapazitätsstrom des Wassers.

d) Stellen Sie eine Funktion der Wassertemperatur T_W in Abhängigkeit von der Lauflänge x, also $T_W(x)$, auf, die für die ersten 5 Meter des Rohrs gültig ist. Stellen Sie dazu zunächst die Differentialgleichung auf, die $T_W(x)$ und x verknüpft.

Lösung:

KF: Die Wärmestromdichte steigt, da ein konstanter Wärmestrom durch eine kleiner werdende Fläche treten muss.
($\sum_{Punkte} = 1$)

a) Für einen Meter gibt:

$$kA = \frac{1}{\frac{1}{2\pi r_1 \alpha_i} + \frac{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda} + \frac{ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_{iso}} + \frac{1}{2\pi r_3 \alpha_a}}$$

$\Rightarrow kA = 0,54\,\frac{W}{K}$
($\sum_{Punkte} = 3$)

b)

$$kA_{iso} = 5 \cdot kA_{a)} = 2,7\,\frac{W}{K}$$

$$kA_{ohne-iso} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi r_1 L \alpha_i} + \frac{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{1}{2\pi r_2 L \alpha_a}} = 7,76\frac{W}{K}$$

$$kA_{ges} = kA_{iso} + kA_{ohne-iso} = 10,46\frac{W}{K}$$

($\sum_{Punkte} = 2$)

c)

$$W = \dot{m} \cdot c_p$$

$$\dot{m} = \rho w A \text{ (A = Durchtrittfläche} = 0,001571\,m^2)$$

Mit $\rho_{H_2O} = 980\frac{kg}{m^3}$ ergibt sich
$\Rightarrow \dot{m} = 0,154\,\frac{kg}{s}$
c_{H_2O} nachschlagen: 4,187 $\frac{J}{kgK}$
$W = 0,644\,\frac{kJ}{K\,s}$
($\sum_{Punkte} = 2,5$)

d) Pro infinitesimaler Weglänge wird folgendes $d\dot{Q}$ bertragen:

$$d\dot{Q} = W dT$$

$$d\dot{Q} = \frac{kA}{L}dx \cdot (T_U - T(x))$$

Kombiniert ergibt das:

$$\frac{dT}{T_U - T(x)} = \frac{kA_{1Meter}}{W} dx$$

Draus ergibt sich nach der Integration über beide Seiten von 0 bis x:

$$ln(\frac{T_U - T(x)}{T_U - T(x=0)}) = \frac{-kA_{1Meter}}{W} x$$

Das führt letztendlich zu:

$$T(x) = T_U + (T(0) - T_U) e^{\frac{-kA_{1Meter}}{W} x} mit$$
$$kA_{1Meter} = 0,54 \, \frac{W}{K\,m} und$$
$$W = 644{,}80 \, \frac{J}{K\,s}$$

($\sum_{Punkte} = 2,5$)

Kurzfrage: Wie lange darf bei einem instationären Wärmeleitproblem davon ausgegangen werden, dass es sich bei einem Körper um einen halbunendlichen Körper handelt?

Stahlbarren werden zum Härten in ein Wasserbad eingetaucht, so dass sie vollkommen von Wasser umgeben sind. Das Wasserbad hat die konstante Temperatur von $t_W = 100°C$. In der Halle, in der dieser Vorgang stattfindet, herrscht eine Lufttemperatur $t_L = 20°C$.

Folgende Werte sind bekannt:

λ_{Stahl}	$c_{p,Stahl}$	ρ_{Stahl}	λ_{Wasser}	ρ_{Wasser}
$20\,\frac{W}{K\,m}$	$0{,}47\,\frac{J}{g\,K}$	$7900\,\frac{kg}{m^3}$	$0{,}68\,\frac{W}{K\,m}$	$960\,\frac{kg}{m^3}$

a) Es wird beobachtet, dass ein Barren, dessen Oberfläche nur noch eine Temperatur von 130°C hat, einen größeren Wärmestrom an das Wasserbad abgibt, als ein zweiter, geometrisch gleicher Barren aus dem gleichen Material, der an der Oberfläche eine Temperatur von etwa 200°C hat. Wie erklären Sie diesen Effekt (qualitativ)?

Eine Stahlplatte mit großer Abmessung in x- und y-Richtung im Verhältnis zu ihrer Dicke $d = 10\,cm$, die zum Zeitpunkt t_0 überall die einheitliche Temperatur von $600°C$ aufweist, wird in das Wasserbad getaucht (Wärmeübergangskoeffizient $\alpha = 4000\frac{W}{m^2K}$).

b) Wie lange dauert es, bis sich ein Punkt, der $1\,cm$ von der Plattenmitte entfernt liegt, auf eine Temperatur von $200°C$ abgekühlt hat?

c) Wie lange dauert es, bis sich ein Punkt, der $1\,cm$ von der Oberfläche entfernt liegt, auf eine Temperatur von $599°C$ abgekühlt hat?

d) In einer kurzen Pause, in der sich kein heißer Stahl in dem Wasserbad befindet, soll der Stoffübergang vom Wasser an die Luft untersucht werden. Mithilfe der für die Geometrie gültigen Nusseltbeziehung wird die entsprechende Sherwoodbeziehung bestimmt und genutzt um analog zum Wärmeübergangskoeffizienten den Stoffübergangskoeffizienten β zu bestimmen. Mit der Beziehung $\dot{N} = \beta\frac{A}{RT}\Delta p_{H_2O}$ wird dann der Stoffstrom (Wasser) berechnet, der vom Wasserbad in die Luft übergeht. Aus welchen zwei Gründen, ist das damit berechnete Ergebnis falsch?

Lösung:

KF:So lange, bis sich der Punkt des betrachteten Körpers, dessen Temperatur sich als letztes verändert, seine Temperatur in einem für die Untersuchung relevanten Maß geändert hat.
($\sum_{Punkte} = 1$)

a) Bei der höheren Temperaturdifferenz bildet sich Filmsieden aus, das isolierend wirkt. Bei der kleineren Temperaturdifferenz findet noch reines Blasensieden statt, so dass dort das alpha deutlich größer ist.
($\sum_{Punkte} = 1$)

b) Mit $\frac{x}{L} = 0{,}2$, $\frac{1}{Bi} = 0{,}1$ in Abb 4.11 ergibt

$$\frac{T - T_\infty}{T_c - T_\infty} = 0{,}96$$

daraus ergibt sich

$$\frac{T_c - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 0{,}208$$

Damit in Abb 4.10 ergibt $Fo = 1$. Daraus lässt sich die Zeit $t = 464,7\,s$ bestimmen.
($\sum_{Punkte} = 4,5$)

c) Da α sehr hoch ist kann mit der Randbedingung der ersten Art gerechnet werden. Alternativ müsste iterativ gearbeitet werden. Halbunendlicher Körper:

$$\frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} = 0{,}002;$$

Interpolieren zwischen z=2,1 und z=2,2:
z=2,188!
Daraus lässt sich die Zeit $t = 0,97\,s$ bestimmen.
($\sum_{Punkte} = 3,5$)

d) Der Stoffübergang ist einseitig behindert. Und es findet gleichzeitig Stoff und Wärmeübergang statt: Eine Ackermannkorrektur wäre nötig.
($\sum_{Punkte} = 1$)