Institut für Thermodynamik
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

2. März 2009

Klausur zur Vorlesung

Thermodynamik

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- bzw Gedankengang muss erkennbar sein! Interpolationsvorschriften sowie Stützstellen sind anzugeben. Quadratische Gleichungen sind analytisch zu lösen.
Hilfsmittel, sofern sie nicht der Kommunikation dienen, sind zugelassen.
Verwenden Sie ausschließlich die im Skript oder Buch angegebenen Stoffwerte-Tabellen.
Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

Aufgabe 1: *Maxwell, Innere Energie und Wärmekapazität* 9 von 50 Punkten

Kurzfrage: Warum muss bei einer isobaren Temperaturerhöhung $T_1 \rightarrow T_2$ mehr Wärme zugeführt werden, als bei einer isochoren Temperaturerhöhung $T_1 \rightarrow T_2$? („$c_p > c_v$“ bzw. „Isochoren sind steiler als Isobaren“ reicht als Begründung nicht aus)

a) Leiten Sie die Maxwellrelation $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,n_j} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n_j}$ her.

b) Zeigen Sie von einer allgemeinen Zustandsfunktion für die spezifischen inneren Energie u ausgehend, dass die spezifische innere Energie eines reinen, idealen Gases nur von dessen Temperatur abhängt.

c) Bestimmen Sie die maximale isobare Wärmekapazität $C_{p,m}$ von Ethin (C_2H_2), einem linearen Molekül.

KF: Bei der isobaren Prozessführung dehnt sich das betrachtete System aus. Ein Teil der zugeführten Wärme wird also genutzt, um Volumenänderungsarbeit an der Umgebung zu verrichten, und steht nicht mehr zur Erhöhung der inneren Energie (und damit der Temperatur) zur Verfügung.

a) G = G(T,p) Fundamentalgleichung

$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp$

Gibbsche Fundamentalgleichung: $dG = -SdT + Vdp$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$-S = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$ und

$V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$

Schwartzscher Satz: $\frac{\partial \frac{\partial G}{\partial T}}{\partial p} = \frac{\partial \frac{\partial G}{\partial p}}{\partial T}$

Nach Einsetzen der von $-S = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$ und $V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$ ergibt sich:

$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$

b) Laut Anhang gilt:

$$\begin{aligned} dU = &\left\{ nC_{p,m} - p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n_j} \right\} dT \\ &- \left\{ p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n_j} + T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n_j} \right\} dp \\ &+ \sum_{k=1}^{k} \left\{ \mu_k - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,n_j} - p\left(\frac{\partial V}{\partial n_k}\right)_{T,p,n_j \neq n_i} \right\} dn_k \end{aligned}$$

Da sich die Stoffmenge pro Masse nicht ändert (Reinstoff) ist $dn_k = 0$; der letzte Summand fällt also weg und für die spezifische innere Energie ergibt sich:

$$\begin{aligned} du = &\left\{ c_p - p\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \right\} dT \\ &- \left\{ p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T + T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \right\} dp \end{aligned}$$

Da es sich um ein ideales Gas handelt gilt $pV = nR_mT$ bzw. $pv = R_iT$. Damit ergibt sich:

$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R_i}{p}$ und $\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{R_iT}{p^2}$

Nach Einsetzten verbleibt $du = (c_p - R_i)dT + 0$. q.e.d.

Nur noch von T abhängig. (Hinweis: $c_p - R_i = c_v$)

c) 4 Atome = 3*4 = 12 Freiheitsgrade insgesamt.

Davon 3 translatorische (Beitrag je 1/2 R_m)

sowie 2 (linear !) rotatorische Freiheitsgrade (Beitrag je 1/2 R_m)

Somit verbleiben 7 vibratorische Freiheitsgrade (Beitrag je 1 R_m)

Insgesamt beträgt $c_{v,m}$ also 9,5 R_m.

Daraus folgt für die isobare Wärmekapazität: $c_{p,m} = c_{v,m} + R_m = 10,5R_m$

Aufgabe 2: *Haarföhn* 13 von 50 Punkten

Kurzfrage: Was bedeutet der Begriff „stationär“?

Es soll ein normaler Föhn, der zum Haaretrocknen verwendet wird, betrachtet werden. Dabei hat der Föhn zu Beginn und die Umgebung dauerhaft die räumlich konstante Temperatur von $t_u = 20°C$. Im stationären Betrieb hat der Föhn eine Luftaustrittstemperatur von $t_{aus} = 50°C$. Gehen Sie weiterhin davon aus, dass die trockene Luft im Föhn und in der Umgebung bei einem Druck von $1\,bar$ vorliegt.

a) Stellen Sie für den Föhn eine Energiebilanz zu drei Zeitpunkten auf: $1\,s$ vor dem Einschalten, $\frac{1}{10}\,s$ nach dem Einschalten und $10\,Minuten$ nach dem Einschalten. Schreiben Sie bitte zunächst eine vollständige Energiebilanz so auf, wie sie in der Vorlesung hergeleitet wurde, und diskutieren Sie dann für die drei Fälle knapp, warum manche Terme wegfallen und welche für die Beschreibung relevant sind.

Betrachten Sie ab hier stets den stationären Betriebszustand des Föhns.

b) Der Föhn nimmt eine elektrische Leistung von $1{,}1\,kW$ auf. Wie groß ist der maximale Volumenstrom, der angesaugt werden kann.

c) Wie groß ist die Differenz der spezifischen Entropie zwischen der einströmenden und der ausströmenden Luft? Woher kommt diese zusätzliche Entropie? Wie groß ist die Differenz der spezifischen Exergie zwischen eintretender und austretender Luft?

d) Zeichnen Sie die Zustandsänderung, die die Luft im Föhn durchläuft in ein geeignetes Zustandsdiagramm ein, in dem Sie dann die spezifische Entropiezunahme der Luft, die der Luft zugeführte spezifische Wärme und die spezifische Enthalpieänderung der Luft kenntlich machen.

e) Ist es in der Realität möglich, mit einer elektrischen Heizung 100% des zugeführten elektrischen Stroms in Wärme umzuwandeln? Würde das bedeuten, dass eine solche Heizung reversibel arbeitet?

f) Im Eintrittszustand soll nun von einer relativen Feuchte von $\phi = 50\%$ ausgegangen werden. Wie groß ist jetzt der maximale Massenstrom bei ansonsten gleichen Bedingungen ($t_u = 20°C$, $t_{aus} = 50°C$ und $\dot{w}_{elektr} = 1{,}1\,kW$)? Wie groß ist die relative Feuchte am Austritt?

KF: Stationär: Die zeitliche Ableitung / Änderung aller thermodynamischer Zustandsgrößen ist gleich Null.

a) 1s vor dem Einschalten wird der 1.HS zu 0=0 (Keine Änderung, Keine Zu- oder Abflüsse)

1/10s nach dem Einschalten: dU/dt ist nun ungleich Null (instationär), da sich Gehäuse und Heizspirale erwärmen. Evtl. könnte auf der kinetische Term eine Rolle spielen, das das Gebläse auf Touren gebracht werden muss. Der potentielle Term ist irrelevant.

Auf der rechten Seite gibt es zwei betragsgleiche Massenströme mit unterschiedlichem Vorzeichen (Ein- und ausströmende Luft) mit unterschiedlicher Enthalpie. (Kinetische und potentielle Terme spielen hier keine Rolle). Weiterhin wird technische Arbeit (Strom) zugeführt und evtl. Wärme über das Gehäuse abgeführt. Eine Änderung des Kontrollvolumens mit der Zeit findet nicht statt.

10 min nach dem Einschalten: Links alles Null (stationär) und rechts wie bei 1/10 Sekunde nach dem Einschalten.

b) Im besten Fall gibt das Gehäuse keine Wärme nach außen ab und es verbleibt: $0 = \dot{m}(h_{ein} - h_{aus}) + \dot{W}_t$

Da es sich um ein ideales Gas handelt gilt $dh = c_p dT$ mit $c_p = 1,005 J/gK$.

$\dot{m} = \frac{\dot{W}_t}{c_p(T_{aus} - T_{ein})} = 0,0365 kg/s$

Gesucht ist aber $\dot{V}$ und nicht $\dot{m}$! $\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho_{ein}}$

$\rho = 1/v = 1,18 \frac{kg}{m^3}$ ist aus der Idealgasgleichung ermittelbar mit T=293,15K, $R_i = 287,1 \frac{J}{kg\,K}$ und p=1 bar.

Damit ergibt sich $\dot{V} = 0,0309 \frac{m^3}{s}$.

c) $s_2 - s_1 = c_p ln(\frac{T_2}{T_1}) = 0,0979 \frac{KJ}{kgK}$

Die zusätzliche Entropie wird der Luft mit dem Wärmestrom zugeführt.

d) $\Delta w_{ex} = h_{ein} - h_{aus} - T_u(s_{ein} - s_{aus})$

mit $dh = c_p dT$, $\Delta T = 30K$ und $T_u = 293,15K$ (und $s_{ein} - s_{aus} = 0,0979 \frac{KJ}{kgK}$) ergibt sich:

$\Delta w_{ex} = 1,45 \frac{kJ}{kg}$

e) T-s-Diagramm: Zustand 1 und 2 liegen auf der 1-bar-Isobare. Zustand 2 liegt rechts oben relativ zu Zustand 1.

Die Fläche unter der isobaren Verbindungslinie ist die zugeführte spezifische Wärme und gleichzeitig die Zunahme der spezifischen Enthalpie. Die Zunahme der Entropie wird als Strecke abgelesen. Es ist der horizontale Abstand zwischen Zustand 1 und Zustand 2.

f) Das ist möglich. Der Prozess wäre deshalb aber noch lange nicht reversibel, da Strom kein Entropie transportiert, ein Wärmestrom jedoch immer. Nur eine Wärmepumpe, könnte theoretisch reversibel arbeiten. Dann wäre der Heizwärmestrom größer als die zugeführte elektrische Leistung.

e) feuchte Luft: Am Eintritt des Föns herrschen jetzt 50% relative Luftfeuchtigkeit.

$p_s = 0,0234 bar$ laut Dampftafel bei 20°C

$p_D = 0,5 \cdot p_s = 0,0117 bar$

$x = 0,622 \frac{p_D}{p - p_D} = 11,8 \frac{g}{kg}$

<u>Maximaler Massenstrom:</u>

$\dot{m}_{feucht} = \frac{\dot{W}_t}{\Delta h}$

$\Delta h = c_{p,L} \cdot \Delta T + x_D \cdot c_{p,D} \cdot \Delta T = 30,83 \frac{kJ}{kg}$

Daraus ergibt sich $\dot{m}_{feucht} = 0,0357 \frac{kg}{s}$

<u>Relative Austrittsfeuchte:</u>

$p_s = 0,1233 bar$ laut Dampftafel bei 50°C

$\phi = \frac{p_D}{p_s} = \frac{0,0117}{0,1233} = 9,49\%$

Aufgabe 3: *Kreisprozess* 14 von 50 Punkten

Kurzfrage: Was ist das allgemeine Ziel rechtsdrehender Kreisprozesse? Und welches das Ziel linksdrehender?

In einer offenen Gasturbine wird Luft (ideales Gas, $c_p = 1006 \frac{J}{Kkg}$) aus der Umgebung (Zustand 1) angesaugt und durchläuft folgende Schritte:

1-2 Verdichtung mit einem realen Verdichter (Verdichterwirkungsgrad $\eta_{SV} = 0{,}95$)

2-3 Isobare Zustandsänderung bis $T_3 = 650°C$.

3-4 Adiabat isentrope Expansion, so dass folgendes Dichteverhältnis gilt: $\frac{\rho_4}{\rho_3} = 0{,}52$

Danach strömt die Luft im Zustand 4, der von den Umgebungsbedingungen abweichen kann, in die Umgebung.
Weitere Informationen: Der Verdichter nimmt eine Leistung von $210\,kW$ auf und saugt einen Massenstrom von $2\,\frac{kg}{s}$ an. In der Umgebung herrscht eine Temperatur von $20°C$ und ein Druck von $1\,bar$.

Lösen Sie folgende Aufgaben, die sich auf den oben beschriebenen Kreisprozess beziehen:

a) Zeichnen Sie den Prozess in ein T-s Diagramm ein!

b) Bestimmen Sie den Druck p_2 und die Temperatur T_2!

c) Bestimmen Sie den zugeführten Wärmestrom $\dot{Q}_{2-3}$.

d) Bestimmen Sie die von der Gasturbine abgegebene technische Arbeit $\dot{w}_t$.

e) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jede Wärmekraftmaschine stets ein Teil der zugeführten Wärme auch wieder abgegeben muss. In welchem Bauteil geschieht dies im vorliegenden Fall?

f) Welchen Wirkungsgrad könnte ein reversibler Kreisprozess bei gleicher Brennkammer- und Umgebungstemperatur erreichen? Nennen Sie zwei Gründe, aufgrund derer der in dieser Aufgabe vorgestellte Prozess nur einen geringeren Wirkungsgrad besitzt?

KF: rechtsdrehend: Wärme in Arbeit umwandeln. linksdrehend: Unter Aufwendung von Arbeit Wärme auf ein höheres Temperaturniveau heben.

a) Zeichnung: Offener Joule Kreisprozess. mit nicht isentroper Verdichtung (leicht nach rechts geneigt) aber isentroper Entspannung (senkrecht). Wärmezufuhr isobar. Keine Verbindung von Zustand 4 nach Zustand 1.

b) $t_2 = t_1 + \frac{\dot{W}_t}{\dot{m} \cdot c_p} = 124,4°C = 397,5K$

Aus die Definition des Verdichterwirkungsgrads ergibt sich:

$0,95 = \frac{t_2^* - t_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow t_2^* = 119,18°C = 392,3K$

adiabat isentrop: $\frac{T_2^*}{T1} = \frac{p_2}{p_1}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$

Mit $\kappa = 1,4$ folgt daraus für $p_2 = 2,77bar$

c) $q_{2,3} = c_p(t_3 - t_2) = 1,006\frac{kJ}{kgK} \cdot (650°C - 124,4°C) = 525,5\frac{kJ}{kg}$

Bei einem Massentrom von 2 kg/s ergibt das einen Wärmestrom $Q_{2,3} = 1051kW$

d) $c_v ln(\frac{T_4}{T_3}) = R \cdot ln(\frac{v_3}{v_4}) = R \cdot ln(\frac{\rho_4}{\rho_3}) = R \cdot ln(0,52)$
Alternativ: $\frac{T_4}{T_3} = (\frac{v_3}{v_4})^{\kappa-1}$
$\Rightarrow t_4 = 437°C = 710K$

$\dot{W}_{t,3-4} = \dot{m}(T_4 - T_3) = 428,5kW$

Gesamtleistung der Anlage ist die eben errechnete Turbinenleistung abzüglich der Verdichterleistung von 210 kW: 218,5 kW

e) Wärmeabgabe erfolgt zwischen Zustand 4 und 1. Kein Bauteil erforderlich, da der Prozess offen ist.

f) Bestmöglicher Wirkungsgrad: Carnotwirkungsgrad!

$\eta_C = \frac{926K - 293K}{923K} = 0,682$

Der vorliegende Prozess ist schlechter, da der Verdichter nicht ideal arbeitet und da Wärmeabgabe und Zufuhr entlang einer endlichen Temperaturdifferenz stattfinden.

Aufgabe 4: *Wasserkocher* 14 von 50 Punkten

Kurzfrage: Im Nassdampfgebiet, sind Druck und Temperatur aneinander gekoppelt. Wie verändert sich also die Zahl der Freiheitsgrade im p-v-T-Raum und welches Gesetz macht eine Aussage über Anzahl der vorhanden Freiheitsgrade in Abhängigkeit der vorliegenden Phasen.

In einen elektrischen Wasserkocher in einer Küche in Braunschweig werden $2\,l$ Wasser mit $20°C$ eingefüllt. Das Wasser hat im flüssigen Zustand eine Wärmekapazität von $4{,}18\,\frac{kJ}{kg\,K}$. Die Bodenplatte des Wasserkochers, in die die Heizspirale eingebaut ist und deren Temperatur zur Vereinfachung der Rechnung stets die gleiche Temperatur wie das Wasser haben soll, hat eine Masse von $400\,g$ und eine Wärmekapazität von $0{,}48\,\frac{kJ}{kg\,K}$.

Für die verbleibenden Bestandteile des Wasserkochers (Gehäuse), die dafür sorgen, dass das der Kocher nach außen thermisch perfekt isoliert ist, soll gelten, dass diese keine Wärme aufnehmen.

Da der Wasserkocher einen Defekt hat, schaltet er sich nicht ab, sobald das Wasser kocht.

a) Nach 45 Minuten ist das Wasser im Kocher vollständig verdampft. Welche Leistung hat der Kocher?

b) Würde der Kocher für das vollständige Verdampfen auf einer Berghütte (Luftdruck $= 0{,}8\,bar$) länger oder kürzer brauchen?

c) Wie lange dauert es - ausgehend von dem Zeitpunkt, zu dem das Wasser den Siedepunkt erreicht - bei einer angenommen elektrischen Leistungsaufnahme des Kochers in Braunschweig von $2{,}2\,kW$, bis die Mischung aus flüssigem Wasser und Dampf ein Volumen von $0{,}5\,m^3$ einnimmt? (Gehen Sie dazu von der Annahme aus, dass der aus dem Wasserkocher austretende Dampf sich nicht mit der Umgebungsluft mischt und keine Wärme mit der Umgebung austauscht.)

Die folgenden Aufgabenteile haben keinen Bezug mehr zu dem Wasserkocher, sondern beziehen sich ganz allgemein auf eine Drosselung von siedendem Wasser in einer Umgebung mit $20°C$, das von $255°C$ in einer adiabaten Drossel auf $10\,bar$ gedrosselt wird.

d1) Bestimmen Sie den Dampfgehalt vor und hinter der Drossel!

d2) Bestimmen Sie die Temperatur hinter der Drossel!

d3) Bestimmen Sie den Druck vor der Drossel!

e) Bestimmen Sie den irreversiblen Arbeitsverlust, der bei der Drosselung von $1\,kg$ Wasser entsteht.

KF: Gibbssche Phasenregel. $f = N + 2 - \phi$

Da im Nassdampfgebiet ϕ sich von 1 auf 2 erhöht, sinkt die Anzahl der Freiheitsgrade um 1 (von 2 auf 1).

a) Wasser und Bodenplatte müssen von 20 auf 100°C erwärmt werden(Energiebedarf jeweils $m \cdot c_p \cdot 80K$). Danach muss noch das Wasser vollständig verdampft werden (Energiebedarf ist $m_w \cdot r_D$).

Damit ergibt sich ein Gesamtbedarf von 5196,16 kJ

Die notwendige Leistung ist der Quotient aus Energie und Zeit. Es ergibt sich $\frac{5196{,}16kJ}{45 \cdot 60s} = 1,925kW$.

b) Bei 0,8 bar ist die Verdampfungsenthalpie r_D nicht mehr 2256 kJ/kg, sonder 2273 kJ/kg. Die Verdampfung benötigt also mehr Energie. Im Gegenzug muss die Bodenplatte und das Wasser allerdings nicht mehr auf 100°C, sondern nur noch auf 93,5°C erwärmt werden.

Rechnung, wie bei a) mit dem Ergebnis für den Energiebedarf von 5174 kJ. Da der Bedarf niedriger ist, wir der Kocher (bei gleicher Leistung) diesen Zustand schneller erreichen.

c) $v = \frac{0{,}5m^3}{2kg} = 0,25\frac{m^3}{kg}$

Bei $p = 1bar$ sind $v' = 0,00104\frac{m^3}{kg}$ und $v'' = 1,672\frac{m^3}{kg}$

Also ist $x = \frac{0{,}25 - 0{,}00104}{1{,}672 - 0{,}00104} = 0,149$

Um diesen Dampfgehalt herzustellen (ausgehend von der siedenden Flüssigkeit) wird folgende Energie benötigt: $2kg \cdot x \cdot (h'' - h') = 672,3kJ$

Bei einer Leistung von 2,2 kW werden dafür $\frac{672{,}3kJ}{2200W} = 309$ Sekunden benötigt. (Ca. 5 Minuten)

d) Dampfgehalt vor der Drossle = 0 (siedendes Wasser!)

Druck vor der Drossel: $p = p_s(255°C) = 44,1bar$ (Dampftafel)

Enthalpie vor der Drossel (= Enthalpie nach der Drossel h_2): $h = h'(44,1bar) = 1110kJ/kg$

Temperatur hinter der Drossel: $T = T_s(10bar) = 179,88°C$

Dampfgehalt über Enthalpie bestimmen: $x = \frac{h_2 - h'(10bar)}{h''(10bar) - h'(10bar)} = 0,173$

e) $w_{v,irr} = s_{prod} \cdot T_u$

$s_{prod} = \Delta s = s_2 - s_1$

$s_1 = s'(255°C) = 2,837\frac{kJ}{Kkg}$

$s_2 = x \cdot s''(10bar) + (1 - x) \cdot s'(10bar) = 2,935\frac{kJ}{Kkg}$

$w_{v,irr} = 28,8kJ$