

## Klausur zur Vorlesung

### Thermodynamik

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- bzw Gedankengang muss erkennbar sein!  
Interpolationsvorschriften und Stützstellen sind anzugeben.  
Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.  
Verwenden Sie ausschließlich die im Skript/Buch angegebenen Dampftafeln.  
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

**Aufgabe 1:** *Exergie eines idealen Gases*

12 von 50 Punkten

Kurzfrage: Ist die theoretische Arbeitsfähigkeit einer Dose Cola, die eine Temperatur von  $5^{\circ}\text{C}$  und einen Druck von  $1,1\text{ bar}$  hat in einer Umgebung mit  $20^{\circ}\text{C}$  und  $1\text{ bar}$  positiv oder negativ. (Kann die Cola Arbeit leisten während sie auf Umgebungszustand gebracht wird oder muss Arbeit an der Cola geleistet werden?)

Luft, ein ideales Gas, mit der Masse  $m_L = 5\text{ kg}$  liegt im Zustand 1 bei  $p_1 = 2\text{ bar}$  und  $T_1 = 400\text{ K}$  vor. Es soll auf den Zustand 2 ( $p_2 = 1,5\text{ bar}$ ,  $T_2 = 300\text{ K}$ ) gebracht werden. die Umgebung hat eine Temperatur von  $t_U = 10^{\circ}\text{C}$  und einen Druck von  $p_U = 1,2\text{ bar}$ .

- Wie groß ist das Volumenverhältnis  $\frac{V_1}{V_2}$ ?
- Zeichnen Sie in ein p-V-Diagramm die Prozessschritte von Zustand 1 zu Zustand 2 ein, die einen maximalen Arbeitsgewinn ermöglichen. Kennzeichnen Sie darin die Volumenänderungsarbeit, die an der Luft geleistet wird ebenso wie die, die von der Luft geleistet wird.
- Wie groß ist die Exergie des Systems im Zustand 1? Wie groß im Zustand 2?
- Wie viel Arbeit kann  $1\text{ kg}$  der Luft maximal leisten, während es von Zustand 1 zu Zustand 2 gebracht wird?
- Wie viel Volumenänderungsarbeit wird pro  $\text{kg}$  der Luft an der Umgebung geleistet? (Während des Prozesses von Zustand 1 zu Zustand 2)
- In welchen Prozessschritten wird bei einem optimal geführten Prozess (Zustand 1  $\rightarrow$  Zustand 2) Entropie mit der Umgebung ausgetauscht?

### Lösung:

KF: Die Dose kann Arbeit leisten. Jeder Körper, der nicht im Gleichgewicht mit der Umgebung ist, kann Arbeit leisten. ( $\sum_{Punkte} = 1$ )

a) Unter Beachtung der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase ergibt sich:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1,5 \text{ bar} \cdot 400 \text{ K}}{2,0 \text{ bar} \cdot 300 \text{ K}} = 1$$

( $\sum_{Punkte} = 1$ )

b) adiabat/isentrop von Zustand 1 bis  $T_U$ , dann isotherm, dann adiabat/isentrop bis  $T_2$ . Dabei darauf achten, dass Zustand 2 das gleiche Volumen wie Zustand 1 hat.

( $\sum_{Punkte} = 2$ )

c) Exergie des Zustands 1:

$$-W_{ex} = U_1 - U_U + p_U(V_1 - V_U) - T_U(S_1 - S_U)$$

(gilt analog auch für Zustand 2)

$$U_1 - U_U = mc_v(T_1 - T_U) = 419,5 \text{ kJ}$$

(Zustand 2:  $60,49 \text{ kJ}$ )

$V_1 - V_U$  kann aus der therm. Zustgl. f. ideale Gase bestimmt werden

$$S_1 - S_U = mc_p \ln\left(\frac{T_1}{T_U}\right) - mR_i \ln\left(\frac{p}{p_U}\right) = 1002,88 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

(Zustand 2:  $-29,8 \frac{\text{J}}{\text{K}}$ )

$$-W_{ex} = 73738 \text{ J} \text{ (Zustand 2 : } 7143 \text{ J)}$$

( $\sum_{Punkte} = 5$ )

d)

$$\frac{W_{ex,1} - W_{ex,2}}{5 \text{ kg}} = 13328,99 \text{ J}$$

( $\sum_{Punkte} = 1$ )

e) Da  $V_1 = V_2$  wird keine Volumenänderungsarbeit an der Umgebung geleistet

( $\sum_{Punkte} = 1$ )

f) Im isothermen Schritt. (Die anderen Schritte sind ja ADIABAT)

( $\sum_{Punkte} = 1$ )

Kurzfrage: Warum ist jede Wärmezufuhr zu einem System in realen Prozessen immer irreversibel?

Ein Wärmetransformator ist eine Maschine, der ein Wärmestrom  $\dot{Q}_m$  auf mittlerem Temperaturniveau zugeführt wird und die einen Teil dieses Wärmestroms,  $\dot{Q}_h$ , ohne Zufuhr von technischer Arbeit auf ein höheres Temperaturniveau fördert. Der verbleibende Teil des Wärmestroms,  $\dot{Q}_{ab}$ , wird auf einem niedrigeren Temperaturniveau, meist dem Umgebungstemperaturniveau, abgegeben.

Der Wärmetransformator, der in dieser Aufgabe untersucht werden soll, arbeitet als solcher reversibel. Er bekommt in einem Wärmeübertrager von dem Wassermassenstrom  $\dot{m}_W$  den benötigten Wärmestrom  $\dot{Q}_m$  bei der konstanten Wärmetransformator-Temperatur  $T_m$  zugeführt. Das Wasser hingegen ändert seine Temperatur: Es tritt in den Wärmeübertrager mit einer Eintrittstemperatur von  $t_{W, \text{ein}} = 50^\circ\text{C}$  ein und tritt mit einer niedrigeren Temperatur wieder aus, da ihm der Wärmestrom  $\dot{Q}_m$  entzogen wird.

Der Wärmetransformator gibt den Wärmestrom  $\dot{Q}_h$  bei einer konstanten Wärmetransformator-Temperatur  $t_h = 400^\circ\text{C}$  mittels eines Wärmeübertragers an einen Luftstrom, der seine Temperatur infolge der Wärmezufuhr verändert, ab. Der Abwärmestrom  $\dot{Q}_{ab}$  wird auf Umgebungstemperaturniveau  $t_U = 0^\circ\text{C}$  der Umgebung zugeführt.

Folgende Größen sind weiterhin bekannt: Der Luftmassenstrom  $\dot{m}_L$  ist doppelt so groß wie der Wassermassenstrom  $\dot{m}_W$ . Der Luftstrom tritt mit einer Eintrittstemperatur von  $t_{L, \text{ein}} = 200^\circ\text{C}$  in den Wärmeübertrager ein, wo ihm der Wärmestrom  $\dot{Q}_h$  zugeführt wird.

- Zeichnen Sie ein Schaubild, das Wasserstrom, Luftstrom, Wärmetransformator und alle Wärmeströme enthält.
- Wieviel Wärme kann einem kg Wasser des Wasserstroms maximal entzogen und dem Wärmetransformator zugeführt werden in Abhängigkeit von  $T_m$ ? Wie groß ist die Exergie dieser Wärme bei einer Temperatur von  $T_m$ ? Wie muss  $T_m$  gewählt werden, damit der Exergiestrom, der dem Wärmetransformator zugeführt wird, maximal wird?

Hinweis: Gehen Sie ab hier von  $t_m = 30^\circ\text{C}$  aus.

- Bestimmen Sie die maximalen Wärmeströme  $\dot{Q}_m$  und  $\dot{Q}_h$  jeweils in Abhängigkeit von  $\dot{m}_W$ .
- Bestimmen Sie die Luftaustrittstemperatur  $T_{L, \text{aus}}$ .

### Lösung:

KF: Jede reale Wärmezufuhr funktioniert nur aufgrund einer Temperaturdifferenz. Ein Wärmestrom über eine Temperaturdifferenz erzeugt aber Entropie. Also ist jede reale Wärmezufuhr irreversibel.

(  $\sum_{Punkte} = 1$  )

- a) Wasserstrom gibt  $Q_m$  an den WT ab. Der WT gibt den Wärmestrom  $Q_h$  an den Luftstrom ab und den Wärmestrom  $Q_{ab}$  an die Umgebung. Weiterhin könnten die bekannten Temperaturen (Eintrittstemperaturen Luft und Wasser sowie Umgebungstemperatur) angegeben werden.

(  $\sum_{Punkte} = 2$  )

- b) Einem Kilogramm Wasser kann  $Q_m = c_{H_2O}(50^\circ C - t_m)$  entzogen werden.

$$c_{H_2O} = 4,182 \frac{kJ}{kg K} \quad m_{H_2O} = 1kg$$

Die Exergie dieser Wärme ist:

$$W_{ex} = Q_m \frac{T_m - T_u}{T_m} = Q_m \cdot \left(1 - \frac{T_u}{T_m}\right)$$

Die Exergie, die (pro Kilogramm Wasser, das mit  $T_w$  eintritt) an den WT abgegeben werden kann ist also

$$w_{ex} = c_{H_2O}(T_w - T_m) \frac{T_m - T_u}{T_m}$$
$$w_{ex} = c_{H_2O} \left( T_w - \frac{T_w T_u}{T_m} - T_m - T_u \right)$$

Das Maximum dieser Funktion ist gesucht. Also wird sie abgeleitet und danach muss die Nullstelle gefunden werden.

$$\frac{T_w T_u}{T_m^2} - 1 = 0$$
$$T_m = \sqrt{T_w T_u}$$

(  $\sum_{Punkte} = 4$  )

c)

$$\dot{Q}_m = \dot{m}_w c_{H_2O} \cdot 20 K$$
$$\dot{Q}_m = \dot{Q}_h + \dot{Q}_{ab} (1.HS)$$
$$\frac{\dot{Q}_m}{T_m} = \frac{\dot{Q}_h}{T_h} + \frac{\dot{Q}_{ab}}{T_{ab}} (2.HS - reversibel)$$

2 Gleichungen und 2 Unbekannte ( $\dot{Q}_h$  und  $\dot{Q}_{ab}$ ) liefern nun das Ergebnis:  
(Alternativ hätte das folgendes Ergebnis auch über eine Exergiebilanz gefunden werden können.)

$$\dot{Q}_h = 0,1665 \cdot \dot{m}_w c_{H_2O} \cdot 20 K$$

(  $\sum_{Punkte} = 2,5$  )

d)

$$\dot{m}_L c_{p,Luft} (t_{L,aus} - t_{L,ein}) = \dot{Q}_h (1.HS)$$

$$\begin{aligned}\dot{Q}_h &= 0,1665 \cdot \dot{m}_w c_{H_2O} \cdot 20 \text{ K} \\ \dot{m}_L &= 2 \cdot \dot{m}_w\end{aligned}$$

ergibt sich daraus:

$$2 \cdot \dot{m}_w c_{p,Luft} (t_{L,aus} - t_{L,ein}) = 0,1665 \cdot \dot{m}_w c_{H_2O} \cdot 20 \text{ K}$$

Da  $t_{L,ein} = 200^\circ\text{C}$  bekannt ist ergibt sich unter Berücksichtigung von  $c_{p,Luft} = 1,006 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$ :

$$t_{L,aus} = 200^\circ\text{C} + \frac{0,1665}{2} \cdot \frac{4,182 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}}{1,006 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}} \cdot 20 \text{ K} = 206,92^\circ\text{C}$$

(  $\sum_{\text{Punkte}} = 2,5$  )

Kurzfrage: „isentrop“, „ $\dot{s}_{prod} = 0$ “ und „reversibel“: Welche dieser drei Aussagen haben die gleiche Bedeutung? Erklären Sie knapp, warum die dritte einen anderen Sachverhalt beschreibt.

In einem Kreisprozess mit einem umlaufenden Massestrom vom  $\dot{m} = 0,5 \frac{kg}{s}$  des Arbeitsmediums Propan werden folgende Schritte durchlaufen:

- 1-2 Isobare Wärmeabfuhr bis zu einem Dampfgehalt von  $x = 0,1$ .
- 2-3 Ideale Drosselung
- 3-4 Isobare Wärmezufuhr bis das Arbeitsmedium bei einer Temperatur von  $T_4 = 11,7^\circ C$  vorliegt. Dabei ist es um  $10 K$  überhitzt.
- 4-1 Kompression auf 20 bar (Verdichterwirkungsgrad  $\eta_{SV} = 0,90$ )

Stoffwerte für Propan (gasförmig)

spezifische Enthalpie [kJ/kg] in Abhängigkeit von Druck und Temperatur:

	274,9 K	284,9 K	344,8 K	351,1 K
3,6 bar	582,6	599,6	708,1	720,3
5,0 bar	576,8	594,4	705,0	717,3
6,7 bar	-	587,5	701,1	713,6
20 bar	-	-	662,4	678,0

spezifische Entropie [kJ/kg K] in Abhängigkeit von Druck und Temperatur:

	274,9 K	284,9 K	344,8 K	351,1 K
3,6 bar	2,4478	2,5085	2,8535	2,8884
5,0 bar	2,3705	2,4334	2,7853	2,8206
6,7 bar	-	2,3611	2,7227	2,7585
20 bar	-	-	2,4334	2,4769

Stoffwerte für Propan (Naßdampfgebiet)

p [bar]	T[K]	h' [kJ/kg]	h'' [kJ/kg]	s' [kJ/kgK]	s'' [kJ/kgK]
2,0	247,7	138,54	545,75	0,7659	2,4099
3,6	264,2	178,44	565,09	0,9206	2,3829
5,0	274,9	204,33	576,77	1,0156	2,3705
6,7	284,9	229,87	587,49	1,1057	2,3611
12,3	308,6	294,02	610,37	1,3181	2,3433
20,0	330,4	359,36	626,02	1,5172	2,3243
25,0	341,4	395,71	630,11	1,6219	2,3085

Lösen Sie folgende Aufgaben, die sich auf den oben beschriebenen Kreisprozess (vorangegangene Seite) beziehen:

- a) Zeichnen Sie den Prozess in ein T-s Diagramm ein!
- b) Handelt es sich bei dem oben beschriebenen Prozess um einen Wärmekraftprozess? Begründen Sie Ihre Antwort knapp.
- c) Bestimmen Sie für alle vier Eckpunkte die Temperatur und den Druck, sowie für Punkt 3 und 4 den Dampfgehalt  $x$  sofern diese Punkte im Naßdampfgebiet liegen.
- d) Wie groß ist die Leistung, die der Verdichter aufnehmen muss? Wie groß ist der vom Prozess aufgenommene Wärmestrom? Wie groß der abgegebene?

### Lösung:

KF: Reversibel hat die gleiche Bedeutung wie  $s_{prod} = 0$ . isentrop hingegen bedeutet, dass die Entropie eines Systems konstant bleibt. Es kann aber sehr wohl Entropie produziert werden ( $s_{prod} > 0$ ) solange diese über einen Wärmestrom abgeführt wird.

( $\sum_{Punkte} = 1$ )

a) Zeichnung: TS Diagramm mit ND-Gebiet.

( $\sum_{Punkte} = 2, 5$ )

b) Nein. Es ist ein linksdrehener Prozess, also ein Kälte- oder WP-Prozess.

( $\sum_{Punkte} = 1$ )

c) Beginne mit Punkt 4 und 3:  $T_4 = 11,7^\circ C$  ist  $10^\circ C$  überhitzt, d.h.,  $T_s = 1,7^\circ C = 274,9 K$ . Der damit korrespondierende Sättigungsdruck  $p_4 = p_3$  ist 5 bar. Da Punkt 3 im ND Gebiet liegt ist seine Temperatur  $T_3 = T_s = 1,7^\circ C$

Nun soll Zustand 1 gefunden werden:

$h_4$  aus Stoffdaten (gasförmig) bei 5 bar und  $11,7^\circ C$ :  $594,4 \frac{kJ}{kg}$ .

Über die Beziehung für den Isentropenwirkungsgrad  $\eta_{sv}$  für Verdichter und über das Wissen, dass  $T_1^* = 344,8 K$  über  $s_4 = s_1^*$  gefunden werden kann und sich daraus auch  $h_1^* = 662,4 \frac{kJ}{kg}$  bestimmen lässt, kann schließlich  $h_1 = 670 \frac{kJ}{kg}$  bestimmt werden.

Hieraus lässt sich nun auch  $T_1$  berechnen (Interpolation aus Stoffdaten (gasförmig)):

$$T_1 = \frac{(351,1K - 344,8K)}{(678 \frac{kJ}{kg} - 622 \frac{kJ}{kg})} \cdot (670 \frac{kJ}{kg} - 622,4 \frac{kJ}{kg}) + 344,8 = 347,9 K$$

Nun Punkt 2: Druck  $p_2 = p_1 = 20bar$ . Und die Temperatur ist, da wir uns im ND befinden  $T_2 = T_s(20bar) = 330,4 K$

Nun muss nur noch  $x_3$  bestimmt werden. Aufgrund der idealen Drosselung gilt:  $h_3 = h_2$ . Also muss nun  $h_2$  bestimmt werden:

$$h_2 = 0,1 \cdot 626,02 \frac{kJ}{kg} + (1 - 0,1) \cdot 359,36 \frac{kJ}{kg} = 386,03 \frac{kJ}{kg} = h_3$$

Das gesuchte  $x_3$  ergibt sich zu  $x_3 = \frac{h_3 - h'}{h'' - h'} = 0,49$

( $\sum_{Punkte} = 7, 5$ )

d)

$$\dot{W}_{t,41} = \dot{m}(h_1 - h_4) = 37,8 kW$$

$$\dot{Q}_{ab} = \dot{m}(h_2 - h_1) = -141,99 kW$$

$$\dot{Q}_{zu} = -\dot{W}_{t,41} - \dot{Q}_{ab} = 104,19 kW$$

( $\sum_{Punkte} = 2$ )



Kurzfrage: Welchen Wert nimmt der Polytropenexponent  $n$  eines idealen Gases für eine isotherme Zustandsänderung an? Welchen für eine isochore Zustandsänderung?

- a) Zeigen Sie, ohne bereits bekannte Werte für  $c_p$  und  $c_v$  zu verwenden, dass der Isentropenexponent von Luft bei Raumtemperatur  $\kappa \approx 1,4$  ist.
- b) Zwei Systeme (System A und System B) bestehen jeweils aus der gleichen Masse Luft. Beide haben zu Beginn die gleiche Temperatur ( $T_1 = 20^\circ\text{C}$ ) und den gleichen Druck ( $p_1 = 1 \text{ bar}$ ). Beide Systeme werden so verdichtet, dass die spezifischen Volumina  $v_{A,2}$  und  $v_{B,2}$  beider Systeme nach der Verdichtung ebenfalls gleich sind. Bei System A erfolgt die Verdichtung allerdings adiabat isentrop, während sie bei System B polytrop mit einem Polytropenexponent  $n = 1,2$  durchgeführt wird. Zeigen Sie, in welchem System die Endtemperatur  $T_2$  höher ist.
- c) In welchem der beiden unter b) beschriebenen Fälle wird mehr Wärme mit der Umgebung ausgetauscht?

**Lösung:** KF: Isotherm für ideales Gas: Vergleich  $pv^n = konst$  (polytrop) und  $pv = RT$  (ideales Gas). Wenn T konstant ist (isotherm), muss  $n=1$  sein, damit beide Gleichungen erfüllt sind.

Damit bei isochoren Bedingungen  $pv^n = konst$  gilt, muss  $n \rightarrow \infty$  gelten.

(  $\sum_{Punkte} = 1$  )

a)

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$c_v = 5/2R$$

(3 transl. Freiheitsgrade + 2 rot Freiheitsgrade)

$$c_p = c_v + R = 7/2R$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5} = 1,4$$

(  $\sum_{Punkte} = 5$  )

b) adiabat/isentrop:  $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{(\kappa-1)}$

Daraus folgt:

$$T_{2,isen} = \frac{T_1}{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\kappa-1}}$$

polytrop:  $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{(n-1)}$

Daraus folgt:

$$T_{2,poly} = \frac{T_1}{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{n-1}}$$

$\frac{v_2}{v_1}$  in beiden Fällen gleicher Wert, der kleiner als eins ist (Verdichtung).  $T_1$  ist ebenfalls in beiden Fällen gleich.

$\kappa = 1,4$  ist jedoch größer als  $n = 1,2$

Also ist  $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{n-1}$  größer als  $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\kappa-1}$ .

Also ist  $T_{2,isen}$  größer als  $T_{2,poly}$

(  $\sum_{Punkte} = 5$  )

c) Beim adiabaten Fall wir keine Wärme ausgetauscht (adiabat!). Also muss bei dem polytropen Fall mehr Wärme ausgetauscht werden.

(  $\sum_{Punkte} = 1$  )